جمهورية السودان

وزارة التعليم العام

المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

بخت الرضا

## التعليم الثانوي

# الرياضيات


## الصف الثاني

جمهورية السودان
وزارة التعليم العام
المركز القومي للمناهج والبحث التربوى
– بخت الرضا –

# الرياضيات
## للصف الثاني الثانوي


**إعداد** : لجنة بتكليف من المركز القومي للمناهج والبحث التربوي من الأساتذة:

| | |
|---|---|
| الدكتور : عبد الغني ابراهيم محمد | المركز القومي للمناهج والبحث التربوي |
| الأستاذ : علـــي محمـــد الجـــاك | المركز القومي للمناهج والبحث التربوي |
| الأستاذ : محمد الحسن طه محمد | جامعة أم درمان الإسلامية |
| الأستاذ : عبد الرحمن عبد الكريم ساتي | جـــامعـــة بخت الرضـــا |

**مراجعة :**

| | |
|---|---|
| الدكتور : محسن حسن عبد الله هاشم | كلية العلوم الرياضية جامعة الخرطوم |
| الاستاذ : عبد الســلام الشريـــف | مدير عام إدارة التدريب بوزارة التربية |
| الأستاذ : أميـــن أحمـــد الحـــاج | كلية التربية – جامعة الخرطوم |

**نقحه :**

| | |
|---|---|
| د. عبد الله محمود عبد المجيد | المركز القومي للمناهج والبحث التربوي |
| د. بشرى الفاضل إبراهيم | المركز القومي للمناهج والبحث التربوي |
| أ. عبد الكريم عباس خليفة | التعليم الثانوي / ولاية الخرطوم |
| د. شوقي حسن عبد الله | كلية العلوم والتكنلوجيا /جامعة السودان |

**الإخراج الفنى والتصميم :**

| | |
|---|---|
| الأستاذ : ابراهيم الفاضل الطاهر | المركز القومي للمناهج والبحث التربوي |

**الجمع بالحاسوب :**

| | |
|---|---|
| اشراقة فرح شريف | المركز القومي للمناهج والبحث التربوي |
| أحمد عبد الرضي علي | المركز القومي للمناهج والبحث التربوي |

**تصميم الغلاف :**

| | |
|---|---|
| مجدي محجوب فتح الرحمن | المركز القومي للمناهج والبحث التربوي |

# المحتويات

## المقدمة

الحمد لله رب العالمين ، والصلاة والسلام على سيدنا محمد اشرف المرسلين ، وآله وصحبه أجمعين .

**أما بعد :**

يسعدنا أن نقدم لابنائنا الطلبة كتاب الرياضيات للصف الثاني الثانوي تواصلاً لما تم إعداده من مناهج المرحلة الثانوية في ضوء خطة التطوير التربوى للمرحلة الثانوية من جانب . ومن جانب آخر تمشياً مع التطور الكبير الذى حدث في محتوى مادة الرياضيات في النصف الأخير من القرن العشرين من حيث المحتوى وطريقة العرض والأسلوب واللغة ، هذا التطور الذى لم تتح الفرصة لمناهج المرحلة الثانوية في السودان لمواكبته طوال الفترة الماضية . لذلك حاولنا أن يكون منهج الرياضيات مواكباً للعصر من حيث الأسلوب والمحتوى وطريقة العرض .

ويشمل هذا الكتاب الهندسة الإحداثية ، الدوال الأسية واللوغريثمية،الجذور الصم ، ونظرية الباقي والعامل ، حساب المثلثات ، والمتتاليات ، المتباينات والبرمجة الخطية ، والعمليات الثنائية ، مجموعة الأعداد المركبة.

آملين أن نكون قد وفقنا في ذلك كله ، ومرحبين بكل نقد بناء من الطلبة وأولياء الأمور والمعلمين والموجهين لاثراء الكتاب وتطويره .

**والله الموفق**

**المؤلفون**

# الوحدة الأولى :

# الهندسة التحليلية (الإحداثية)

**أهداف الوحدة الأولى :**

بعد دراسة هذه الوحدة يتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن :

١/ يجد معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل ونقطة .
٢/ يجد معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل والجزء المقطوع من المحور الصادي.
٣/ يجد معادلة المستقيم بمعلومية الجزئين المقطوعين من المحور السيني والمحور الصادي.
٤/ يجد معادلة المستقيم بمعلومية العمود النازل منه على نقطة الأصل والزاوية المحصورة بين المحور السيني والعمود.
٥/ يعرف الصورة العامة للخط المستقيم .
٦/ يجد طول العمود النازل من نقطة معلومة على مستقيم معلوم .

# الوحدة الأولى
## الهندسة التحليلية (الإحداثية)
### (١ –١) المعادلات الخطية ( معادلات الخط المستقيم) :

لقد رأينا أن كل زوج مرتب (س ، ص) من الأعداد الحقيقية يعين نقطة من المستوى الاحداثي ، وعلى العكس كل نقطة من المستوى الاحداثي تقابل زوجاً مرتباً من الأعداد الحقيقية . وقد ترغب في تعيين مجموعة جزئية من نقاط المستوى تتمتع بخاصية معينة ، فإذا امكن ذكر هذه الخاصية بمعادلة تربط الإحداثي السيني لكل نقطة بالإحداثي الصادي ، سمينا هذه المعادلة بمعادلة مجموعة النقاط المطلوب تعيينها .

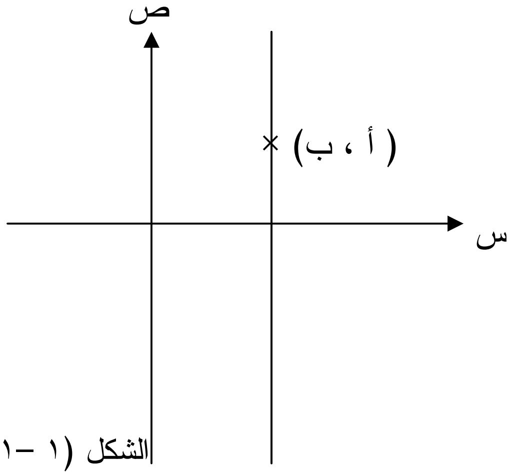
فلو اشترطنا مثلاً أن تقع نقاط مجموعة جزئية من المستوى على مستقيم ل ، وأوجدنا معادلة تربط الإحداثي السيني لنقطة إختيارية من هذه المجموعة بالإحداثي الصادي ، فإننا نسمي هذه المعادلة معادلة المستقيم ل .

فمعادلة المستقيم هي علاقة تربط بين الإحداثي السيني والإحداثي الصادي لجميع النقاط الواقعة على المستقيم . أو هي الصفة المميزة لإحداثيات النقاط الواقعة على هذا المستقيم.

فمعادلة مستقيم يوازي المحور الصادي من السهل إيجادها ، لتكن ( أ ، ب) أى نقطة على هذا المستقيم ، حينئذٍ جميع النقط على الخط المستقيم وليس غيرها تكون إحداثياتها السينية هى أ .

∴ معادلة هذا المستقيم هي س = أ

أي أن النقطة تكون على الخط المستقيم إذا وفقط إذا كان احداثيها السينى يحقق هذه المعادلة . الشكل (١ –١)




الشكل (١ –١)

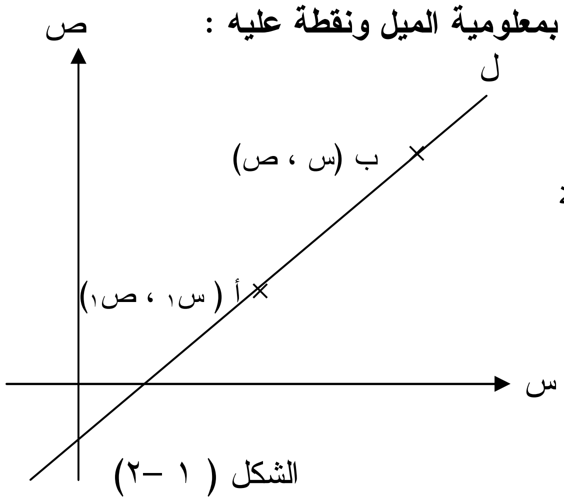
وبالمثل المستقيم الذي يوازي المحور السيني ويمر بالنقطة ( أ ، ب) معادلته تكون على الصورة ص = ب حيث ب هي الإحداثي الصادي المشترك لجميع النقاط التى على الخط المستقيم . فمثلاً معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٢ ،–٤) ويوازي المحور السينى هى : ص = –٤ .

الحالتان الخاصتان المهمتان لما سبق هما المحوران السيني والصادي نفسهما ، فمعادلة المحور السينى هى ص = ٠ ، ومعادلة المحور الصادي هى س =٠ .

نعود الآن للمستقيمات غير الموازية لأي من المحورين ، فالنظرة المميزة للمستقيم هى استقامته . هندسياً هذا يعني أنه إذا حسب الميل من نقطتين على المستقيم فإننا نحصل على النتيجة نفسها مهما كان إختيار النقطتين .
تستخدم هذه الخاصية لايجاد معادلة مستقيم يمر بنقطة معطاه وميله معطى كما يلى :

**(١ –٢) ( أ ) معادلة المستقيم بمعلومية الميل ونقطة عليه :**

لنفرض أن المستقيم ل له الميل م ويمر بالنقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) شكل (١ –٢)
لنأخذ ب ( س ، ص ) أي نقطة على ل غير أ .
∴ ميل القطعة أ ب هو نفسه ميل المستقيم ل مهما كان موقع ب من المستقيم .



الشكل ( ١ –٢)

$$\therefore \quad م = \frac{ص - ص_{١}}{س - س_{١}}$$

$$\boxed{أي : ص - ص_{١} = م ( س - س_{١})}$$

وهذه المعادلة تحدد العلاقة بين إحداثيي أي نقطة (س ، ص) على المستقيم ل . وهي معادلة المستقيم ل الذى ميله م ويمر بالنقطة المعلومة (س١ ، ص١) . وتسمى هذه المعادلة صورة الميل ونقطة لمعادلة الخط المستقيم .

**مثال (١) :**

جد معادلة المستقيم الذى ميله $\frac{٢}{٥}$ ويمر بالنقطة (١ ،−٤) .

**الحل :**

مما سبق علمنا أن معادلة المستقيم بمعلومية ميله م ونقطة عليه (س١ ، ص١) هى :

ص − ص١ = م (س − س١)

∴ بالتعويض : ص − (−٤) = $\frac{٢}{٥}$ (س − ١)

∴ ص + ٤ = $\frac{٢}{٥}$ ( س − ١)

٥ ص + ٢٠ = ٢ س − ٢

−٢ س + ٥ ص + ٢٢ = ٠

**مثال (٢) :**

جد معـادلة المستقـيم ن المار بالنقطة (−١ ، −٢) وعمـودياً على المستقيم ل الذي ميله $\frac{-١}{٤}$ .

**الحل :**

ميل ل = $\frac{-١}{٤}$ ، ن $\perp$ ل ⇐ ميل المستقيم ن = ٤

( حتى يكون حاصل ضرب الميلين =−١)

∴ معادلة المستقيم ن هى : ص − (−٢) = ٤ [س − (−١)]

∴ ص + ٢ = ٤ ( س + ١ )

ص + ٢ = ٤ س + ٤

−٤س + ص − ٢ = ٠

**(١ −٢) (ب) معادلة مستقيم بمعلومية نقطتين عليه :**

مما سبق يمكننا ايجاد معادلة المستقيم بمعلومية ميله ونقطة عليه . الآن لدينا النقطتان المعلومتان (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢) على المستقيم ل ، فيمكننا إيجاد ميله .

$$\text{ميل ل} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

وبالتعويض عن م في الحالة السابقة بالميل $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ ، وبأخذ إحدى النقتطين المعلومتين ولتكن (س١ ، ص١) كنقطة معلومة على المستقيم ، تكون معادلة المستقيم ل هى :

$$ص - ص_١ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}(س - س_١)$$

$$\boxed{\text{أو} \quad \frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}}$$

**مثال : (٣)**

جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٤) ، (-١، ٣)

**الحل :**

بأخذ (س١ ، ص١) = (٢ ، ٤) ، (س٢ ، ص٢) = (-١، ٣)

$$\therefore \frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

معادلة المستقيم هي

$$\frac{ص - ٤}{س - ٢} = \frac{٣ - ٤}{-١ - ٢}$$

أي :

$$\therefore \frac{ص - ٤}{س - ٢} = \frac{-١}{-٣} = \frac{١}{٣}$$

∴ ٣ ص – ١٢ = س – ٢

∴ – س + ٣ ص – ١٠ = ٠

∴ س – ٣ ص + ١٠ = ٠

**تمرين (١ –١)**

(١) جد معادلة المستقيم الذي ميله ٣ ويمر بالنقطة (٥ ، ١) .

(٢) جد معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{-١}{٢}$ ويمر بالنقطة (–٤، ٠) .

(٣) جد معادلة المستقيم الموازي للمحور الصادي ويمر بالنقطة (٢ ،–١) .

(٤) جد معادلة المستقيم الموازي للمحور السينى ويمر بالنقطة (٢ ،–١) .

(٥) جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (–١، ٥) ، (–١، ٣) .

(٦) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ،–١)والموازي للمستقيم الذي ميله $\frac{٢}{٣}$

(٧) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٠ ،–٢) وعمودياً على المستقيم الذي ميله $\frac{-٣}{٥}$ .

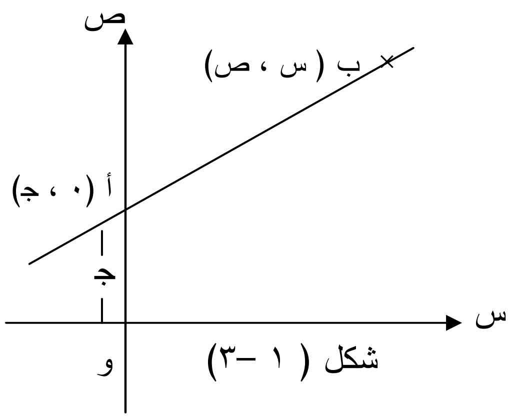
(٨) جد معادلة المستقيم ل المار بالنقطة (٣ ،–٤) وعمودياً على المستقيم ن المار بالنقطتين (٢ ،–٢) ، (٠ ، ٣) .

(٩) لتكن أ (٤ ،–٢) ، ب (١ ، ٢) . جد معادلة المستقيم ل المار بمنتصف القطعة أ ب وعمودياً عليها .

**(١ –٢) (جـ) معادلة المستقيم بمعلومية الميل والجزء المقطوع من المحور الصادي :**

إذا قطع المستقيم جزءً طوله جـ من المحور الصادي ، فإن نقطة تقاطعه مع المحور الصادى هى (٠ ، جـ)

∴ النقطة (٠ ، جـ) تقع على المستقيم . وبأخذ النقطة ب (س ، ص ) كأى نقطة على المستقيم الذى ميله م . الشكل (١ –٣)



شكل ( ١ –٣)

فإن م = $\frac{\text{ص} - \text{جـ}}{\text{س} - ٠}$

∴ م س = ص – جـ

$$\boxed{\therefore \text{ ص} = \text{م س} + \text{جـ}}$$

تلاحظ أن المعادلة إذا كانت على الصورة

ص = م س + جـ

فإن معامل س يساوي ميل المستقيم ل وهو م

والعدد الثابت جـ يدل على الجزء المقطوع من المحور الصادي .

**مثال (١) :**

جد معادلة المستقيم الذى ميله يساوي ٢ ويقطع جزءاً سالباً من محور الصادات طوله ٣ وحدات .

**الحل :**

المستقيم يقطع جزءاً سالباً من المحور الصادي طوله ٣ وحدات

$\therefore$ المستقيم يمر بالنقطة (٠ ،−٣)

وحيث أن ميله = ٢

$\therefore$ معادلته : ص − (−٣) = ٢ ( س − ٠)

$\Leftarrow$ ص + ٣ = ٢ س

$\Leftarrow$ ص = ٢ س − ٣

أو يمكن التعويض مباشرة في صورة معادلة المستقيم في هذه الحالة

وهى : ص = م س + جـ حيث جـ = −٣

أى ص = ٢ س − ٣

**مثال : (٢)**

جد معادلة المستقيم الذى ميله $\frac{-١}{٢}$ ويقطع من المحور الصادي جزءاً طوله ٥ وحدات .

**الحل :**

بما أن م = $\frac{-١}{٢}$ ، جـ = ٥

$\therefore$ معادلة المستقيم : ص = $\frac{-١}{٢}$ س + ٥

أو : س + ٢ ص − ١٠ = ٠

**(١ –٢) ( د) معادلة المستقيم بمعلومية الجزأين المقطوعين من المحورين :**

إذا قطع المستقيم جزءاً طوله أ وحده من المحور السيني فإنه يمر بالنقطة ( أ ، ٠) وإذا قطع جزءاً طوله ب وحدة من المحور الصادي ، فإنه يمر بالنقطة (٠ ، ب) . وبالتعويض في معادلة المستقيم المار بالنقطتين

$$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$ نحصل على

$$\frac{ص - ٠}{س - أ} = \frac{ب - ٠}{٠ - أ}$$

∴ – أ ص = بِ س – أ ب

∴ بِ س + أ ص = أ ب

وبقسمة الطرفين على أ ب نحصل على :

$$\boxed{\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١}$$

هذه المعادلة تسمى معادلة المستقيم بصورة المقطعين

**مثال : (٣)**

جد معادلة المستقيم الذي يقطع من المحور السيني جزءاً طوله ٥ وحدات ومن المحور الصادي جزءاً طوله ٣ وحدات .

**الحل :**

باستخدام الصورة السابقة

$$\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$$

∴ معادلة المستقيم = $\frac{س}{٥} + \frac{ص}{٣} = ١$

وبضرب الطرفين في ١٥ $\Leftarrow$ ٣ س + ٥ ص = ١٥

نلاحظ مما سبق وفي كل الحالات أن معادلة الخط المستقيم تكون في صورتها النهائية على الصورة أ س + ب ص + جـ = ٠

حيث أ ، ب ، جـ ثوابت ، وحيث أ ، ب ليس كلاهما صفراً وهي معادلة من الدرجة الأولى في س ، ص . والعكس كل معادلة على الصورة أس + ب ص + جـ = ٠ تمثل معادلة لخط مستقيم . وتعرف هذه الصورة بالصورة العامة لمعادلة المستقيم .

ويمكن تحويل هذه الصورة لأي من الصور للمعادلات التي مرت بنا .

فالمعادلة : أ س + ب ص + جـ = ٠

$$\Leftrightarrow \quad \text{ب ص} = -\text{أ س} - \text{جـ}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{ص} = \frac{-\text{أ}}{\text{ب}}\,\text{س} - \frac{\text{جـ}}{\text{ب}} \qquad (\text{بافتراض أن ب} \neq ٠)$$

وبمقارنتنا بالمعادلة في الصورة : ص = م س + جـ´

حيث م يمثل ميل المستقيم ، جـ´ الجزء المقطوع من المحور الصادي نجد أن :

$$\text{م} = \frac{-\text{أ}}{\text{ب}} \quad \text{، جـ´} = \frac{-\text{جـ}}{\text{ب}}$$

أي يمكن ايجاد الميل من معامل س ومعامل ص في معادلة المستقيم ، وكذلك الجزء المقطوع من المحور الصادي من الحد الثابت جـ ومعامل ص .

وكذلك يمكن تحويلها إلى صورة المقطعين كما يلى :

أ س + ب ص + جـ = ٠

$$\Leftrightarrow \quad \text{أ س} + \text{ب ص} = -\text{جـ}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\text{أ س}}{-\text{جـ}} + \frac{\text{ب ص}}{-\text{جـ}} = ١$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\text{س}}{\frac{-\text{جـ}}{\text{أ}}} + \frac{\text{ص}}{\frac{-\text{جـ}}{\text{ب}}} = ١$$

∴ الجزء المقطوع من المحور السيني = $\frac{-ج}{أ}$ ( أ ≠ ٠ )

∴ الجزء المقطوع من المحور الصادي = $\frac{-ج}{ب}$ ( ب ≠ ٠ )

**مثال : (٤)**

حول المعادلة ٢ س + ص = ٩ إلى معادلة في صورة المقطعين ثم جد الجزءين المقطوعين من المحورين .

**الحل :**

٢ س + ص = ٩

بالقسمة على ٩ : $\frac{٢}{٩}$ س + $\frac{ص}{٩}$ = ١

∴ $\frac{س}{٩/٢}$ + $\frac{ص}{٩}$ = ١

∴ الجزء المقطوع من المحور السيني = $\frac{٩}{٢}$

∴ الجزء المقطوع من المحور الصادي =٩

يمكنك التأكد بوضع س = ٠ لايجاد الجزء المقطوع من المحور الصادى وبوضع ص = ٠ لايجاد الجزء المقطوع من المحور السيني وايجاد قيمة كل من س ، ص من المعادلة بعد التعويض في كل مرة .

**مثال : (٥)**

جد الميل والجزء المقطوع من المحور الصادي للمستقيم الذي معادلته : ٢ س – ٥ ص – ١١ = ٠

**الحل :**

من المعادلة : أ = ٢ ، ب = –٥ ، جـ = –١١

∴ الميل م = $\frac{-أ}{ب}$ = $\frac{-٢}{-٥}$ = $\frac{٢}{٥}$

الجزء المقطوع من المحور الصادي = $\frac{-\text{جـ}}{\text{ب}} = \frac{-(-١١)}{-٥} = \frac{١١}{-٥}$

= $\frac{-١١}{٥}$

**تمرين (١ −٢)**

(١) جد معادلة المستقيم الذي ميله −٣ ويقطع جزءاً موجباً من محور الصادات طوله ٧ وحدات .

(٢) جد معادلة المستقيم الذي ميله ٢ ويقطع جزءاً سالباً من محور الصادات طوله ٥ وحدات .

(٣) جد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات لكل مستقيم فيما يلي:

( أ ) ل$_{١}$ : ٢ س − ٣ ص + ٥ = ٠

(ب) ل$_{٢}$ : ٨ ص = ٤ س + ١٦

( جـ) ل$_{٣}$ : ٣ ص = −٤

(٤) جد معادلة المستقيم ل الذى يقطع جزءاً سالباً من محور الصادات طوله ٤، وعمودياً على المستقيم ن : ٢ ص = ٤ س − ١ .

(٥) جد معادلة المستقيم الذى يقطع من المحور السيني جزءاً طوله ٢ ومن المحور الصادي جزءاً طوله ٤ وحدات .

(٦) جد الميل والجزءين المقطوعين من المحورين لكل من المستقيمات التالية:

( أ ) ل$_{١}$ : ٣ س − ٤ ص − ١٢ = ٠

(ب) ل$_{٢}$ : ص − ٢ = $\frac{١}{٣}$ (س + ٥)

( جـ) ل$_{٣}$ : ٢ س + ٣ص + ٣ = ٠

( د ) ل$_{٤}$ : ٤ س − ٧ص − ٢٨ = ٠

(٧) جد الزاوية بين المستقيمين :

ل$_{١}$ : ٣ ص − ٢س = ١

ل$_{٢}$ : ٣ ص + ٤س = ٧

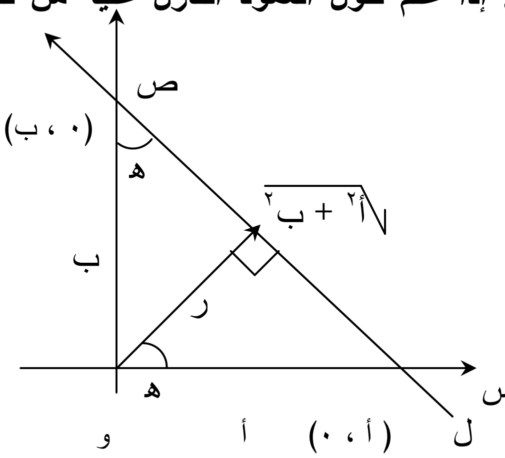
(٨) أ ب جـ مثلث فيه :

معادلة أ ب : س + ٢ ص = ٨

معادلة ب جـ : ص – ٢ س = ٤

معادلة أ جـ : ٤ ص – ٣ س = ٦

**(١ –٢) ( هـ) معادلة المستقيم إذا علم طول العمود النازل عليه من نقطة الأصل وزاوية ميل هذا العمود :**




نفرض أن ر هو طول العمود النازل على المستقيم ل من نقطة الأصل و ، هـ الزاوية من المحور السيني إلى هذا العمود . الشكل (١ –٤)
إذا قطع المستقيم الطولين أ ، ب من المحورين السيني والصادي على الترتيب . نجد أن :

الشكل (١ –٤)

$$\frac{ر}{أ} = \text{جتا هـ} \Leftarrow أ = \frac{ر}{\text{جتا هـ}}$$

$$\frac{ر}{ب} = \text{جا هـ} \Leftarrow ب = \frac{ر}{\text{جا هـ}}$$

وبكتابة معادلة المستقيم في صورة المقطعين .

$$\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$$

$$\therefore \quad \frac{\text{س}}{\frac{\text{ر}}{\text{جتا هـ}}} + \frac{\text{ص}}{\frac{\text{ر}}{\text{جا هـ}}} = ١ \quad \text{أى :} \quad \frac{\text{س جتا هـ}}{\text{ر}} + \frac{\text{ص جا هـ}}{\text{ر}} = ١$$

$$\boxed{\therefore \ \text{س جتا هـ + ص جا هـ = ر}}$$

تعرف هذه المعادلة بالصورة العمودية لمعادلة المستقيم .

في هذه المعادلة المقدار ر موجب ، ومجموع مربعي معاملي س ، ص يساوى الوحدة .

فإذا كانت المعادلة في صورتها العامة أ س + ب ص + جـ = ٠

وأردنا كتابتها بالصورة العمودية س جتا هـ + ص جا هـ = ر نضع المعادلة في الصورة التالية :

أ س + ب ص = − جـ

ثم نقسم طرفى المعادلة على $\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}$ لنحصل على

$$\frac{\text{أ}}{\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}}\,\text{س} + \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}}\,\text{ص} = \frac{-\text{جـ}}{\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}}$$

بمقارنة المعادلة الناتجة بمعادلة المستقيم في الصورة العمودية والشكل (١ −٤) يكون :

$$\text{جتا هـ} = \frac{\text{أ}}{\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}} \ ، \ \text{جا هـ} = \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}} \ ، \ \text{ر} \quad \frac{-\text{جـ}}{\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}}$$

لاحظ أن $\frac{-\text{جـ}}{\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}}$ يجب أن يكون موجباً

لأن ر هي طول العمود النازل على المستقيم .

∴ عند ما تكون جـ قيمتها سالبة نأخذ القيمة الموجبة للعدد $\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}$

وعندما تكون قيمة جـ موجبة نأخذ القيمة السالبة للعدد $\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}$ .

**مثال (١)**

إذا كان طول العمود النازل من نقطة الأصل على مستقيم ما يساوي ٣ وحدات . والزاوية من المحور السيني إلى هذا العمود ٦٠° ، جد معادلة المستقيم.

**الحل :**

المعادلة هي : س جتا هـ + ص جا هـ = ر

حيث هـ = ٦٠° ، ر = ٣

$$\frac{١}{٢}س + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ص = ٣$$

$$\Leftarrow س + \sqrt{٣} ص = ٦$$

**مثال (٢) :**

اكتب معادلة المستقيم س $-\sqrt{٣}$ ص + ٨ = ٠ في الصورة العمودية

**الحل :**

المعادلة س $-\sqrt{٣}$ ص + ٨ = ٠ $\Leftarrow$ س $-\sqrt{٣}$ ص = $-٨$

وبالقسمة على $\sqrt{(١)^{٢} + (-\sqrt{٣})^{٢}}$ . نحصل على الصورة العمودية

$\because \sqrt{(١)^{٢} + (-\sqrt{٣})^{٢}} = \sqrt{١ + ٣} = \pm\sqrt{٤} = \pm ٢$

وبما أن جـ موجبة نأخذ القيمة السالبة = $-٢$

∴ $\frac{-س}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ص = ٤

∴ جتا هـ = $\frac{-١}{٢}$ ، جا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ر = ٤

∴ هـ = ١٢٠ْ

∴ المعادلة في الصورة العمودية هي :

س جتا ١٢٠ + ص جا ١٢٠ = ٤

**تمرين (١ –٣)**

(١) جد معادلة المستقيم إذا كان طول العمود النازل عليه من نقطة الأصل ر وزاوية ميل العمود هـ في كل من الحالات التالية

(أ) ر = ٦ ، هـ = ٣٠ °

(ب) ر = ٤ ، هـ = ٤٥°

(جـ) ر = ١٠ ، هـ = ١٥٠ °

(د) ر = ٥ ، هـ = ١٣٥ °

(٢) اكتب كلا من المعادلات التالية في الصورة العمودية

(أ) ٣ س + ٤ ص – ١٠ = ٠

(ب) $\sqrt{٣}$ س – ص = ٤

(جـ) $\sqrt{٢}$ س + $\sqrt{٢}$ ص = ٨

(٣) طول العمود النازل من نقطة الأصل على مستقيم ما يساوي $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ويصنع زاوية ٦٠ ° في الاتجاه الموجب لمحور السينات . جد معادلة هذا المستقيم .

**(١ –٣) طول العمود النازل من نقطة معلومة على مستقيم معلوم :**

نفرض أن المستقيم المعلوم ل معادلته في الصورة العمودية

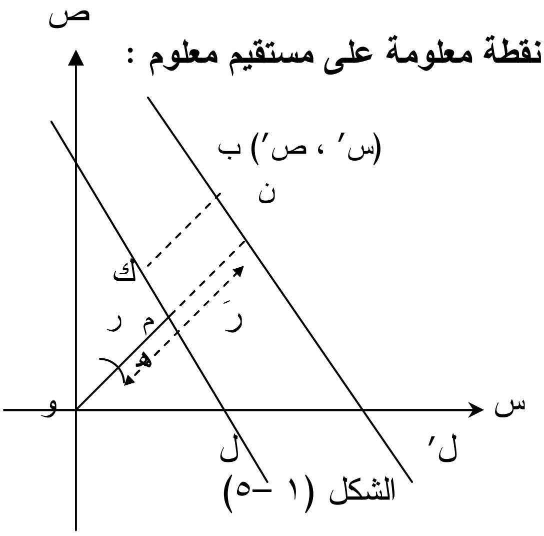
س جتا هـ + ص جا هـ = ر

حيث ر = و م

وأن النقطة المعلومة هى : ب ( س ´ ، ص ´ )

انظر الشكل (١ –٥)

من ب ارسم المستقيم ل ´ الذى يوازى المستقيم ل مد و م على استقامة ليلاقي ل ´ في ن .



الشكل (١ –٥)

خذ و ن = ر ´ . ومن ب انزل العمود ب ك على المستقيم ل

∴ معادلة المستقيم ل ´ في الصورة العمودية هى :

س جتا هـ + ص جا هـ = ر ´ .

النقطة ب ( س ´ ، ص ´ ) تقع على المستقيم ل ´ ، وتحقق معادلته

∴ س ´ جتا هـ + ص ´ جا هـ = ر ´

لكن طول العمود المطلوب يساوى

ر ′– ر = س ´جتا هـ + ص ´جا هـ – ر

أى أننا نحصل على طول العمود المطلوب بتعويض احداثيي النقطة المعلومة في الصورة العمودية لمعادلة المستقيم .

تلاحظ أنه إذا وقعت النقطة (س ´ ، ص ´) في الجانب الآخر من المستقيم غير الجانب الذي به نقطة الأصل فإن ر ´ > ر ويكون البعد ر ´ – ر موجباً .

وإذا وقعت في الجانب الذي به نقطة الأصل ، فإن ر ´ < ر وبالتالي يكون المقدار ر ´ – ر سالباً .

ولتعيين طول العمود بالقيمة العددية نأخذ القيمة المطلقة أي :

$|$ س َجتا هـ + ص َجا هـ − ر $|$ .

وإذا أعطيت معادلة المستقيم في الصورة العامة

أ س + ب ص + جـ = ٠

نحول المعادلة إلى الصورة العمودية كما علمنا سابقاً أولاً :

$$\frac{أ}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}} س + \frac{ب}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}} ص + \frac{جـ}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}} = ٠$$

$$\Leftarrow \quad \frac{أ س + ب ص + جـ}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}} = ٠$$

ثم نعوض احداثيات النقطة (س َ، ص َ) لنحصل على طول العمود الذي يساوي:

$$\left| \frac{أ س َ + ب ص َ + جـ}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}} \right|$$

يمكن إيجاد طول العمود النازل من نقطة الأصل بوضع س َ = ٠ ، ص َ = ٠ في القانون .

**مثال (١) :**

جد طول العمود من النقطة (٥ ، ١) على المستقيم

٥ س + ١٢ ص − ٥٠ = ٠

**الحل :**

$$طول\ العمود = \left| \frac{أ س َ + ب ص َ + جـ}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}} \right|$$

$$\therefore طول\ العمود = \left| \frac{٥ \times ٥ + ١٢ \times ١ - ٥٠}{\sqrt{٢٥ + ١٤٤}} \right| = \left| \frac{-١٣}{\sqrt{١٦٩}} \right| = \frac{١٣}{١٣} = ١ \text{ وحدة طولية}$$

**مثال (٢) :**

جد بعد النقطة د (−٢، ١) عن المستقيم ٦ س + ٨ ص − ٢١ = ٠

**الحل :**

$$\text{البعد} = \left|\frac{٦\times(-٢) + ٨\times ١ - ٢١}{\sqrt{٣٦ + ٦٤}}\right| = \left|\frac{-٢٥}{١٠}\right| = \frac{٢٥}{١٠} = \frac{٥}{٢}$$

**مثال (٣) :**

جد البعد بين المستقيمين المتوازيين

ل : ٨ س − ٦ ص + ٤ = ٠

ن : ٤ س − ٣ ص − ١ = ٠

**الحل :**

البعد بين مستقيمين متوازيين = بعد أى نقطة على أحدهما عن المستقيم الآخر .

نأخذ أى نقطة على أحد المستقيمين وليكن ل بتعويض

ص = ٠ مثلاً ، ∴ س = $\frac{-١}{٢}$

∴ النقطة ( $\frac{-١}{٢}$ ، ٠ ) تقع على المستقيم ل

∴ نوجد بعد هذه النقطة عن المستقيم ن

$$\therefore \text{البعد المطلوب} = \left|\frac{٤\times(-\tfrac{١}{٢}) - ٣\times ٠ + (-١)}{\sqrt{٤^{٢} + ٣^{٢}}}\right| = \left|\frac{-٢ + (-١)}{\sqrt{٢٥}}\right| = \frac{٣}{٥}$$

## تمرين (١ –٤)

(١) جد بعد النقطة أ (١ ، ٣) عن المستقيم م : ٢ ص + س = ٢

(٢) جد بعد النقطة د (–٥، ١) عن المستقيم ن الذي معادلته
٣ س – ٤ ص = –٤

(٣) جد بعد النقطة (٠،٠) عن المستقيم $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٤} = ١$

(٤) جد بعد النقطة ( –٣ ، –٤) عن المستقيم ٢(س+٦) = ٥ (ص–٢)

(٥) جد بعد النقطة (ب ، أ) عن المستقيم $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

(٦) جد بعد نقطة الأصل عن المستقيم ل الذي معادلته :
٥ س – ١٢ ص – ١٢ = ٠

(٧) اكتب معادلة المستقيم س + $\sqrt{٣}$ ص + ٨ = ٠ في الصورة العمودية.

(٨) جد بعد النقطة د(٠ ،–٢) عن المستقيم المار بالنقطتين أ (١ ،–١) ، ب (٣ ، ٥) .

(٩) جد مساحة المنطقة المثلثة أ ب ج حيث أ (–٤، ٦) ، ب (–٣ ، –١)، ج ( ٥ ، ٣) .

(١٠) جد البعد بين المستقيمين المتوازيين
$ل_١$ : س – ٣ ص = ١
$ل_٢$ : س – ٣ ص = ٤

(٨) جد البعد العمودى بين المستقيمين
$ل_١$ : ٥ س – ١٢ ص + ٢٥ = صفر
$ل_٢$ : ١٢ ص – ٥ س– ٢٦ = صفر

**تمرين عام**

(١) جد قيمة ب التي تجعل المستقيمين ٢س + ٣ ص = ٠ ، س + ب ص = ٠ متعامدين .

(٢) جد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، ٤) ويوازي المستقيم الذي يمر بالنقطتين (٢ ، ٢) ، (٧ ، ٥) .

(٣) إذا كانت النقاط (–١، أ – ١ ) ، (أ ، أ – ٣ ) ، ( أ – ٦ ، ٣ ) تقع على استقامة واحدة ، جد قيمة أ .

(٤) أثبت أن الزاوية الحادة بين المستقيمين ص = ٣ س ، ٢ ص – س + ٣ = ٠ تساوي $\frac{\pi}{٤}$ .

(٥) أثبت أن النقط أ ( ٢ ، ٠) ، ب ( ٤ ، ٢) ، جـ ( ٠ ، ٦) تكون رؤوس مثلث قائم الزاوية .

(٦) جد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة ( ٢ ، ١) والزاوية الحادة بينه وبين المستقيم ٤ + ص = ٠ تساوي ٤٥ ° .

(٧) جد المسافة العمودية بين المستقيمين المتوازيين
٤ ص – ٣ س – ١٢ = ٠ ، ٣ س – ٤ ص – ٨ = ٠ .

(٨) أ هي النقطة (٤ ، ٦) ، ب هي النقطة (١٢ ،–٢) ، جـ نقطة تقسيم أب من الداخل حيث $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ ب}}$ = ٣ : ١ جد معادلـــة المستقيـــم الذي يمر بالنقطة جـ ويتعامد مع المستقيم ٣ ص + ٤ س = ٠

(٩) جد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين ٣ س + ٤ص = ٨ ، س – ص = ٠ إذا كان يتعامد مع المستقيم $\frac{\text{س}}{٣}$ + $\frac{\text{ص}}{٤}$ = ١

(١٠) جد قيمة ك التي تجعل المستقيمين
$\frac{\text{س}}{٤}$ + $\frac{\text{ص}}{٥}$ = ١ ، ٢ س + ك ص = ١٠

(أ ) متعامدين (ب) متوازيين

(١١) أثبت أن حاصل ضرب العمودين من نقطتين $(\pm \sqrt{أ^2 - ب^2}، ٠)$
إلى المستقيم $\frac{س}{أ}$ جتاس+ $\frac{ص}{ب}$ جاس =١ هو $ب^2$

(١٢) جد النقاط على المحور السيني والذي بعدها عن المستقيم

$\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$ يساوي أ

(١٣) أثبت أن المستقيمات التالية تتلاقى عند نقطة واحدة
أ/ ٢س −٣ص = ٧ ، ٣س −٤ص = ١٣ ، ٨س −١١ص = ٣٣
ب/ ٣س +٤ص +٦ = ٠ ، ٦س +٥ص +٩ = ٠، ٣س +٣ص +٥ =٠
(١٤) جد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بنقطة تقاطع المستقيمين
٣س−٤ص+١ =٠، ٥س+ص−١ =٠ ويقطع جزئين متساويين من المحورين.

**تذكر أن :**

١/ معادلة المستقيم المار بنقطة ($\text{س}_1$،$\text{ص}_1$) وميله م هي

$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م}\,(\text{س} - \text{س}_1)$ .

٢/ معادلة المستقيم الذي ميله م ويقطع من المحور الصادي جزءًا طوله جـ

هي $\text{ص} = \text{م}\,\text{س} + \text{جـ}$

٣/ معادلة المقطعين هي $\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = ١$

٤/ الصورة العمودية للمستقيم هي س جتاهـ + ص جا هـ = ر

٥/ الصورة العامة لمعادلة المستقيم هي أس + ب ص +جـ = ٠

٦/ طول العمود النازل من النقطة (س′ ، ص′) على المستقيم أس +ب ص+جـ= ٠

يساوي $\left| \frac{\text{أ}\,\text{س}' + \text{ب}\,\text{ص}' + \text{جـ}}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}} \right|$

٧/ إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة أس + ب ص + جـ = ٠

فإن ميل المستقيم $= \frac{-\text{أ}}{\text{ب}}$ (ب ≠ ٠)

طول الجزء المقطوع من المحور السيني $= \frac{-\text{جـ}}{\text{أ}}$ (أ ≠ ٠)

طول الجزء المقطوع من المحور الصادي $= \frac{-\text{جـ}}{\text{ب}}$ (ب ≠ ٠)

# الوحدة الثانية :

# الدوال الأسية واللوغريثمية

## أهداف الوحدة الثانية

بعد دراسة هذه الوحدة يتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن :

١/ يعرّف الأسس واللوغريثمات .
٢/ يميّز بين الأسس واللوغريثمات .
٣/ يجد حلاً للمعادلة الأسية واللوغريثمية .
٤/ يميّز بين المعادلة الأسية واللوغريثمية .
٥/ يبسط المقادير الأسية واللوغريثمية .
٦/ يعبر عن المقادير الأسية بصورة لوغريثمية والعكس.
٧/ يعبر عن المقادير الجذرية بصورة أسية والعكس.
٨/ يعرّف الدوال الأسية واللوغريثمية .
٩/ يميّز بين الدوال الأسية واللوغريثمية .
١٠/ يعطي أمثلة لدوال أسية ولوغريثمية .
١١/ يرسم منحى للدوال الأسية واللوغريثمية .
١٢/ يجد لوغاريثمات الأعداد الحقيقية باستخدام الآلة الحاسبة .

## الوحدة الثانية

# الدوال الأسية واللوغريثمية

**(٢– ١) الأس :**

لقد مر بنا سابقاً أن $س^{٢}$ ، $ص^{٣}$ هي صورة مختصرة لنواتج الضرب س × س ، ص × ص × ص . وقد اتفق على كتابة ناتج الضرب س × س × س × ٠٠٠ × س إلى ن من العوامل بالصورة $س^{ن}$ .

وعرفنا أن $س^{ن}$ تسمى بالصورة الأسية للعدد ، فإذا كتبنا العدد ٦٢٥ بالصورة الأسية يكون هكذا $٥^{٤}$ .

ونسمى العدد ٥ الأساس والعدد ٤ الأس ، والعدد ٦٢٥ القوة الرابعة للعدد ٥ .

ويمكن تلخيص ما سبق بالتعريف التالي :

**(٢– ١) تعريف :**

إذا كان أ عدداً حقيقياً لا يساوي الصفر ، ن عدداً صحيحاً موجباً فإن :

$أ^{ن}$ = أ × أ × أ × ٠٠٠ × أ إلى ن من العوامل

وإذا كان س = $أ^{ن}$ فإننا نسمي العدد أ الأساس والعدد ن الأس

والعدد $أ^{ن}$ القوة النونية للعدد أ .

ومن دراستنا بالصف الثامن عرفنا قوانين الأسس التالية :

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين ، وكان م ، ن عددين صحيحين موجبين فإن :

(١) $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م + ن}$

(٢) $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م - ن}$

(٣) $\text{أ}^{-\text{م}} = \frac{\text{١}}{\text{أ}^{\text{م}}}$

(٤) $(\text{أ ب})^{\text{م}} = \text{أ}^{\text{م}}\ \text{ب}^{\text{م}}$

(٥) $(\text{أ}^{\text{م}})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م ن}}$

(٦) $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{م}} = \frac{\text{أ}^{\text{م}}}{\text{ب}^{\text{م}}}$

(٧) $\text{أ}^{\text{صفر}} = \text{١}$

**مثال (١) :**

جد قيمة كل مما ياتي واكتب الناتج بالصورة الأسية

(١) $\text{٢}^{\text{٢}} \times \text{٢}^{\text{٣}}$ (٢) $\text{٢}^{\text{٥}} \div \text{٢}^{\text{٣}}$ (٣) $(\text{٣}^{\text{٢}})^{\text{٣}}$

(٤) $\text{٢}^{\text{٣}} \times \text{٥}^{\text{٣}}$ (٥) $\text{٥}^{\text{٢}} \div \text{٥}^{\text{٥}}$

**الحل :**

(١) $\text{٢}^{\text{٢}} \times \text{٢}^{\text{٣}} = \text{٢}^{\text{٢} + \text{٣}} = \text{٢}^{\text{٥}}$

(٢) $\text{٢}^{\text{٥}} \div \text{٢}^{\text{٣}} = \text{٢}^{\text{٥} - \text{٣}} = \text{٢}^{\text{٢}}$

(٣) $(\text{٣}^{\text{٢}})^{\text{٣}} = \text{٣}^{\text{٢} \times \text{٣}} = \text{٣}^{\text{٦}}$

(٤) $\text{٢}^{\text{٣}} \times \text{٥}^{\text{٣}} = (\text{٢} \times \text{٥})^{\text{٣}} = \text{١٠}^{\text{٣}}$

(٥) $\text{٥}^{\text{٢}} \div \text{٥}^{\text{٥}} = \text{٥}^{\text{٢} - \text{٥}} = \text{٥}^{-\text{٣}}$

**مثال (٢) :**

اكتب كلاً مما يأتي بأبسط صورة :

(١) $\left(\frac{\text{١}}{\text{٢}}\right)^{\text{٤}} \times \text{٢}^{\text{٤}}$ (٢) $\text{٥ س}^{\text{٣}} \times \text{٢ س}^{\text{٤}}$

(٣) $\text{٨ س}^{\text{٤}} \div \text{٢ س}$ (٤) $\text{٢أ}^{\text{٢}}\text{س}^{\text{٣}} \times \text{٣ أ س}^{\text{٢}}$

**الحل :**

(١) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} \times ٢^{٤} = \left(\frac{١}{٢} \times ٢\right)^{٤} = ١^{٤} = ١$

(٢) $٥\,س^{٣} \times ٢\,س^{٤} = ٥ \times ٢\,س^{٣+٤} = ١٠\,س^{٧}$

(٣) $٨\,س^{٤} \div ٢\,س = \frac{٨}{٢}\,س^{٤-١} = ٤\,س^{٣}$

(٤) $٢أ^{٢}\,س^{٣} \times ٣\,أ\,س^{٢} = ٦أ^{٣}\,س^{٥}$

## تمرين (٢– ١)

(١) جد قيمة كل مما يأتي :

$٣^{٣}$ ، $٤^{٢}$ ، $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}$ ، $(-١)^{٥}$ ، $٣^{-٤}$ ، $٤^{-١}$

(٢) اكتب كلا مما يأتي بابسط صورة

( أ ) $س^{٣} \times س^{٤}$ (ب) $س^{٢} \times س^{٥}$

(جـ ) $٢س^{٢} \times ٣س^{٣}$ (د ) $س^{٥} \times س^{٣}$

(هـ ) $٤س^{٢} \div ٢س^{٢}$ (و ) $٣\,س^{-٢}$

(٣) اكتب ما يأتي في أبسط صورة :

( أ ) $٣س^{٢} \times \frac{٤}{س}$

(ب) $٢س^{٢} \times ٥ص^{٢}$

( جـ) $\frac{٢س^{٢}\,ص}{٣} \times \frac{٦\,ص}{٤\,س^{٢}}$

( د) $\frac{س^{٢} + ٣\,س^{٢}}{٥\,س^{٣}}$

(هـ ) $(٤\,ص^{٢}\,س^{-٣}) \times (٢ص^{-١}\,س^{٢})^{٢}$

## (٢– ٢) الأسس الكسرية :

هل للأس الكسري معنى ؟ ما معنى $س^{١/٣}$ ؟

لنفرض أن $س^{١/٣}$ تساوي ص . ولنفرض أن قوانين الأسس يمكن تطبيقها في حالة أن يكون الأس كسرياً ، ستجد أن .

$ص = س^{١/٣}$

$ص^{٣} = (س^{١/٣})^{٣}$ ومنها $ص^{٣} = س$

وبأخذ الجذر التكعيبي للطرفين نجد أن :

$ص = \sqrt[٣]{س}$ . ونستنتج من ذلك أن $س^{١/٣} = \sqrt[٣]{س}$

فمثلاً $٨^{١/٣} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

لاحظ أننا نحصل على نفس النتيجة إذا فرضنا أن

$٨^{١/٣} = (٢^{٣})^{١/٣} = ٢$

وبالأسلوب نفسه نستطيع أن نبيّن أن :

$٨^{٢/٣} = \sqrt[٣]{٨^{٢}}$

ومن ذلك نستنتج التعريف التالي :

**تعريف :**

> إذا كان أ عدداً حقيقياً غير الصفر ، وكان ن ، م عددين صحيحين ، م > ٠ فإن :
>
> $$أ^{\frac{ن}{م}} = \sqrt[م]{أ^{ن}}$$

هل يمكن تعميم قوانين الأسس على الأسس الكسرية ؟ ، لاحظ مثلاً أن :

$$٤^{١/٢} \times ٤^{٣/٢} = ٤^{١/٢ + ٣/٢} = ٤^{٢} = ١٦$$

وهي نفس النتيجة التي نحصل عليها من :

$$٤^{١/٢} \times ٤^{٣/٢} = \sqrt{٤} \times \sqrt{٤^{٣}} = ٢ \times ٨ = ١٦$$

لذلك يمكن تعميم قوانين الأسس بالشكل التالي :

قوانين الأسس :

إذا كان أ عدداً حقيقياً غير الصفر ، وكان ن ، م عددين نسبيين ، م ≠ ٠ فإن :

(١) $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م + ن}$

(٢) $أ^{م} \div أ^{ن} = أ^{م - ن}$

(٣) $(أ^{ن})^{م} = (أ^{م})^{ن} = أ^{ن م}$

(٤) $(أ)^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$

(٥) $أ^{ن/م} = \sqrt[م]{أ^{ن}}$ ( م عدد صحيح > ٠ )

**مثال (١) :**

$$\sqrt[٥]{٨} = \sqrt[٥]{٢^{٣}} = ٢^{٣/٥}$$

**مثال (٢) :**

حول $٦^{٣/٧}$ إلى الصورة الجذرية .

**الحل :**

$$٦^{٣/٧} = \sqrt[٧]{٦^{٣}} = \sqrt[٧]{٢١٦}$$

**مثال (٣) :**

جد قيمة كل من :

(أ ) $(٢٧)^{١/٣}$ ، (ب) $(-٣٢)^{٣/٥}$ ، ( جـ ) $(٢٥)^{-١/٢}$ ، (د ) $٤^{-٣,٥}$

**الحل :**

(أ ) $(٢٧)^{١/٣} = \sqrt[٣]{٢٧} = \sqrt[٣]{٣^{٣}} = ٣^{٣/٣} = ٣^{١} = ٣$

(ب) $(-٣٢)^{٣/٥} = \sqrt[٥]{(-٣٢)^{٣}} = \sqrt[٥]{((-٢)^{٥})^{٣}}$

$$= \sqrt[٥]{(-٢)^{١٥}} = (-٢)^{١٥/٥} = (-٢)^{٣} = -٨$$

(جـ ) $(٢٥)^{-١/٢} = \frac{١}{٢٥^{١/٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢٥}} = \frac{١}{٥}$

(د ) $٤^{-٣,٥} = ٤^{-٧/٢} = \frac{١}{٤^{٧/٢}} = \frac{١}{(\sqrt{٤})^{٧}} = \frac{١}{٢^{٧}} = \frac{١}{١٢٨}$

**مثال (٤) :**

اختصر :

(أ ) $\frac{٨^{١/٣}}{(١٦)^{١/٢}}$ (ب) $\frac{س^{٣/٤}\ ص^{-٢/٣}}{س^{١/٢}\ ص^{-١/٦}}$ (جـ ) $\frac{٢^{ن+٢} - ٢^{ن}}{٢^{ن-٣} + ٢^{ن+١}}$

**الحل :**

(أ) $\frac{٨^{١/٣}}{(١٦)^{١/٢}} = \frac{(٢^{٣})^{١/٣}}{(٢^{٤})^{١/٢}} = \frac{٢^{٣ \times ١/٣}}{٢^{٤ \times ١/٢}} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

(ب) $\frac{\text{س}^{٣/٤}\ \text{ص}^{-٢/٣}}{\text{س}^{١/٢}\ \text{ص}^{-١/٦}} = \text{س}^{٣/٤ - ١/٢}\ \text{ص}^{-٢/٣ + ١/٦}$

$= \text{س}^{١/٤}\ \text{ص}^{-١/٢} = \frac{\text{س}^{١/٤}}{\text{ص}^{١/٢}}$

(جـ) $\frac{٢^{\text{ن} + ٢} - ٢^{\text{ن}}}{٢^{\text{ن} - ٣} + ٢^{\text{ن} + ١}} = \frac{٢^{\text{ن}}\,(٢^{٢} - ١)}{٢^{\text{ن}}\,(٢^{-٣} + ٢)}$

$= \frac{٣}{\frac{١}{٨} + ٢} = \frac{٣}{\frac{١٧}{٨}} = \frac{٢٤}{١٧}$

## تمرين (٢– ٢)

(١) جد أبسط قيمة لكل ما يأتي :

(أ) $(٢٧)^{٢/٣}$ (ب) $(١٦)^{٣/٤}$ (جـ) $(-١٢٥)^{٢/٣}$

(د) $\left(\frac{١٦}{٨١}\right)^{٣/٤}$ (هـ) $\left(\frac{٨}{٢٧}\right)^{-٢/٣}$

(٢) اكتب كلا من المقادير التالية بأسس موجبة :

(أ) $٣\,\text{س}^{-٣}\,\text{س}^{٢}$ (ب) $\text{س}^{-٢/٣} \times \text{س}^{٥/٣}$

(جـ) $(٩\,\text{س}^{-٣}\,\text{ص}^{٢})^{٢}$ (د) $(٤\,\text{ص}^{٢}\,\text{س}^{-٣})\,(٢\text{ص}^{-١}\,\text{س}^{٢})^{٢}$

(٣) اختصر ما يأتي إلى أبسط صورة :

(أ) $\frac{\text{أ}^{٢}\,\text{ب}^{-١}}{\text{أ}^{٥}\,\text{ب}^{-٣}}$ (ب) $\frac{٣\,\text{س}^{-٢}\,\text{ص}^{٣}}{(٢\text{س})^{-١}\,\text{ص}^{٢}}$

(جـ) $\frac{٢ \times ٣^{\text{ن}+١} - ٣^{\text{ن}-١}}{٦ \times ٣^{\text{ن}} + ٣^{\text{ن}+١}}$

(٤) اختصر كلاً مما يأتي ثم اكتب الناتج بالصورة الأسية

(أ) $\left(\frac{٣}{٤}\right)^{٢} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{-٣/٢}$ (ب) $٥^{٢/٣} \times ٢^{٢/٣}$

(جـ) $\text{أ}^{٢} \times \text{أ}^{٢/٣}$ (د) $\text{أ}^{٤/٥} \times \text{ب}^{٤/٥}$

(٥) حول المقادير التالية إلى الصورة الأسية ثم جد أبسط صورة للمقدار

(أ) $٢ \times \sqrt{٦} \times \sqrt[٣]{٩}$

(ب) $\sqrt{س^{٣}} \times \sqrt[٣]{س^{-٢}}$

**(٢– ٣) الدالة الأسية :**

سبق أن درست في صفوف سابقة تعريف الدالة على أنها علاقة تربط كل عنصر في مجالها بعنصر واحد فقط في مجالها المقابل ، وسنعرف فيما يأتى نوعاً من الدوال تسمى الدالة الأسية :

**(٢– ٢) تعريف :**

الدالة الأسية د ( س ) = $أ^{س}$ حيث أ > ٠ ، أ ≠ ١ هي دالة يكون فيها المتغير أساً مجاله مجموعة الأعداد الحقيقية ح ومداه مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $ح^{+}$
فالدوال د ( س ) = $٢^{س}$

ه ( س ) = $٥^{س}$ ، ق ( س ) = $\left(\frac{١}{٤}\right)^{٢س}$

هي دوال أسية .

**مثال (١) :**

إذا كان د ( س ) = $٢^{س}$ فجد :

د ( ١ ) ، د ( ٢ ) ، د (–٢) ، د $\left(\frac{١}{٢}\right)$

**الحل :**

بما أن د ( س ) = $٢^{س}$

∴ د ( ١ ) = $٢^{١}$ = ٢

د ( ٢ ) = $٢^{٢}$ = ٤

د (–٢) = $٢^{-٢}$ = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ = $\frac{١}{٤}$

د $\left(\frac{١}{٢}\right)$ = $٢^{١/٢}$ = $\sqrt{٢}$

**منحنى الدالة الأسية :**

لرسم منحنى الدالة الأسية ص = أ $^{س}$ . يمكن أن نأخذ بعض قيم المتغير س ثم نوجد قيم ص المناظرة ونكوّن جدولاً بهذه القيم ونمثلها على مستوى المحورين ثم نصل بينها بخط ممهد كما في المثال التالي :

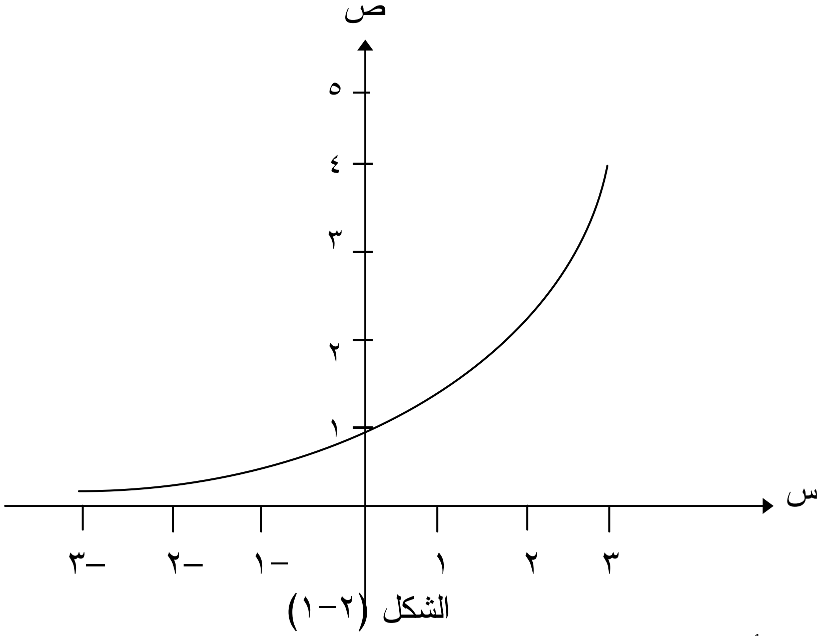
**مثال (٢) :**

ارسم منحنى الدالة د ( س ) = ٢ $^{س}$

**الحل :**

نبنى جدولاً لبعض القيم المتناظرة ( س ، ٢ $^{س}$ ) كما يلي :

| س | ٢– | ١,٥– | ١– | ٠,٥– | ٠ | ٠,٥ | ١ | ١,٥ | ٢ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٢ $^{س}$ | ٠,٢٥ | ٠,٣٥ | ٠,٥ | ٠,٧ | ١ | ١,٤ | ٢ | ٢,٨ | ٤ |




الشكل (٢–١)

لاحظ أنه كلما إزدادت قيم س فإن قيم د ( س ) تزداد

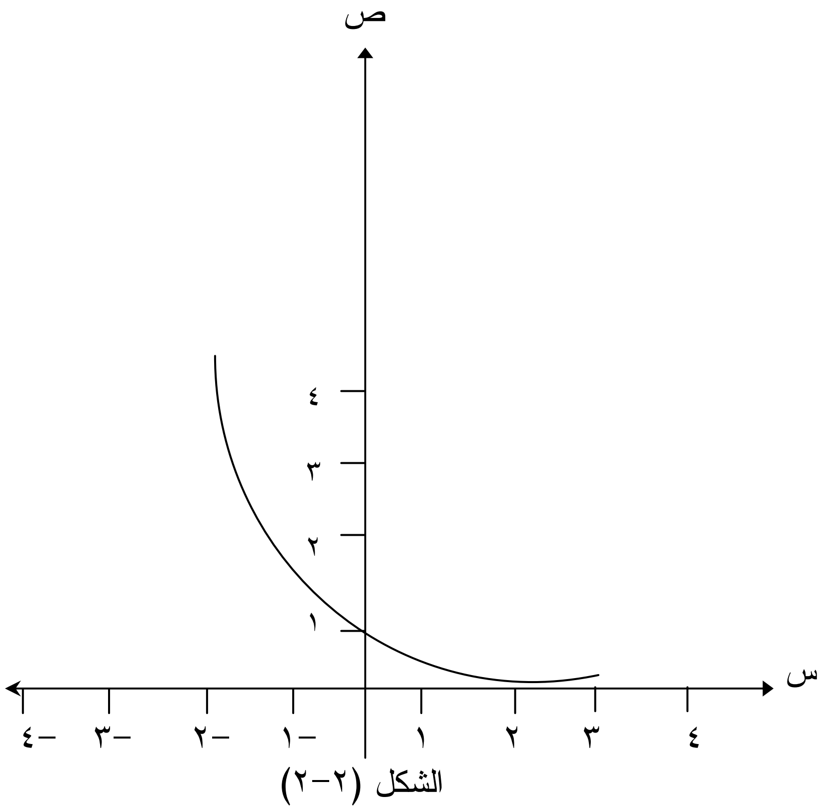
**مثال (٣) :**

أرسم منحنى :

ق ( س ) = $\left(\frac{1}{2}\right)^{س}$

**الحل :**

| س | ٣- | ٢- | ١- | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(\frac{1}{2})^{س}$ | ٨ | ٤ | ٢ | ١ | ٠,٥ | ٠,٢٥ | ٠,١٢٥ |




الشكل (٢-٢)

**مثال (٤) :**

ارسم منحنى كل من د ( س ) = ٢ $^{س}$ ، هـ ( س ) = ٢ $^{-س}$

في مستوى بياني واحد .

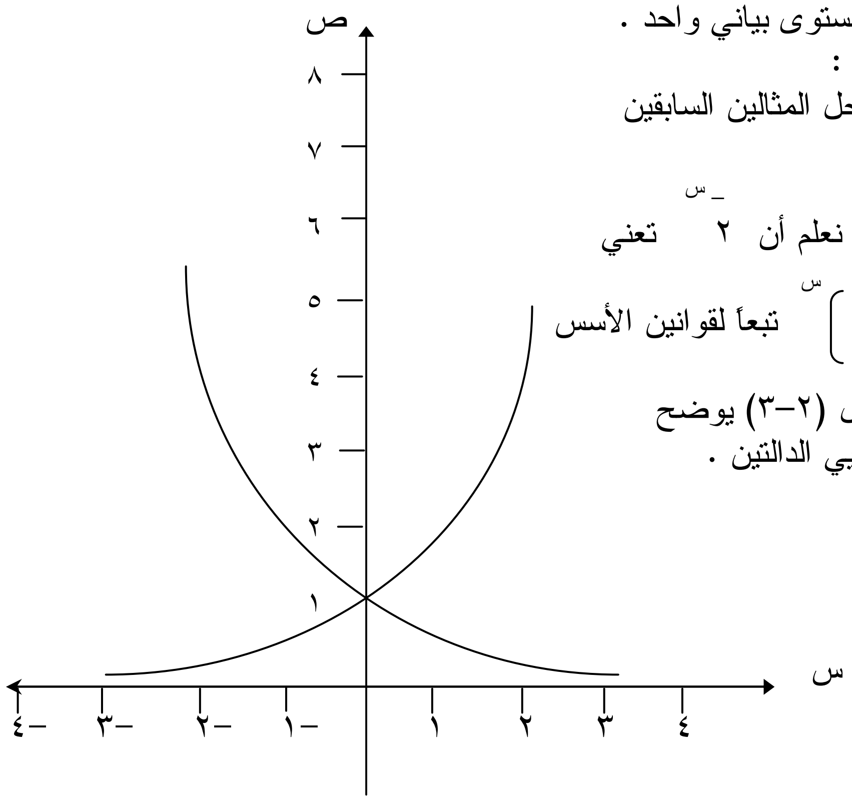
**الحل :**

من حل المثالين السابقين

وكما نعلم أن $٢^{-س}$ تعني

$\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ تبعاً لقوانين الأسس

الشكل (٢–٣) يوضح منحنيي الدالتين .




الشكل (٢–٣)

نلاحظ أن للدالة الأسية بعض الخواص التي يمكن اكتشافها من منحنى هذه الدالة ، فمن الشكل (٤ – ١)حاول الاجابة على الأسئلة التالية :

- هل للدالة الأسية قيم سالبة ؟
- ماذا يحدث لقيمة الدالة الأسية د ( س ) = $٢^{س}$ عندما تزداد قيمة س ؟
- ماذا يحدث لقيمة الدالة الأسية ه ( س ) = $٢^{-س}$ عندما تزداد قيمة س؟
- اذكر الفترة التى تكون فيها قيمة كل من الدالتين أكثر من ١ ؟
- ما النقطة التي يمر فيها كل من منحنيى الدالتين ؟

من خلال اجابتك عن هذه الأسئلة تستطيع أن تتوصل إلى الخواص التالية المتعلقة بالدالة الأسية .

١- الدالـــة الأسيـــة قيمتهـــا دائمـــاً موجبـــة لأن مداها ح$^+$ وأن الدالـــة د ( س ) = أ $^{س}$ من نوع التقابل حيث أ ∍ ح$^+$ − { ١ }

٢- المنحنى البيانى لأى دالة أسية يمر بالنقطة ( ٠ ، ١ ) .

٣- إذا كان أ = ١ فإن د ( س ) = ١$^{س}$ = ١ وهى دالة ثابتة ويمثلها بيانياً خط مستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ١ ) ويوازى المحور السينى .

٤- جميع الدوال الأسية للاساس أ تحقق الشرط

د ( س$_١$ + س$_٢$ ) = د ( س$_١$) × د (س$_٢$ ) ∀ س$_١$ ، س$_٢$ ∍ ح

فمثلاً د ( س ) = ٢$^{س}$ ⇐ د ( ٢ + ٣ ) = د ( ٥ ) = ٢$^٥$ = ٣٢

د ( ٢ ) × د ( ٣ ) = ٢$^٢$ × ٢$^٣$ = ٤ × ٨ = ٣٢

**تمرين (٤ – ٣)**

(١) إذا كان ق ( س ) = ٣ $^{-س}$ فجد :

ق ( ١ ) ، ق ( ‾١ ) ، ق ( $\frac{١}{٢}$ )

(٢) ارسم منحنى الدالة د ( س ) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ في الفترة [−٤، ٤ ]

(٣) أرسم رسماً دقيقاً منحنى الدالة هـ ( س ) = ٢$^{س}$ ومن الرسم جد : هـ (٢,٥ )

(٤) أرسم المنحنى البيانى للدالة ص = ٣$^{س}$ ومن الرسم جد قيمة تقريبية لكل من :

( أ) $\sqrt{٣}$ (ب) $\sqrt{\frac{١}{٣}}$ (جـ ) ٣$^{١,٥}$ (د ) ٣ $^{-١,٥}$

(٥) إذا كان عدد البكتيريا ع في تجمع معين من البكتيريا بعد مرور ن ساعة يعطى حسب المعادلة ع = ١٠ × ٢$^{ن}$ . جد عدد البكتيريا بعد مرور ساعتين.

**(٢– ٤) المعادلات الأسية :**

تعلم أن المعادلة هي جملة مفتوحة ذات متغير أو أكثر مكونة من طرفين متساويين . وقد مر بنا في صفوف سابقة بعض أنواع المعادلات مثل :

معادلة الدرجة الأولى في مجهول واحد كالمعادلة :
$٣ س - ١ = ٨$
أو المعادلة التربيعية مثل : $س^{٢} - ٤س + ٤ = ٠$

أو المعادلة المثلثية ومثال عليها : $جا س = \frac{١}{٢}$

ويوجد نوع آخر من المعادلات يسمى المعادلات الأسية كالمعادلات التالية :

$$٢^{س} = ٤ \quad ، \quad ٣^{٤س} = ٩ \quad ، \quad ٥^{-س} = ٢٥ \quad ، \quad \left(\frac{١}{٤}\right)^{س} = \frac{١}{١٦}$$

نلاحظ أن المجهول جاء في الأس في كل حالة . وحل المعادلة الأسية يعني ايجاد قيم المتغير المجهول فيها .
وفيما يلى حل لبعض المعادلات الأسية :
مثال (١) :
حل المعادلة الأسية : $٣^{٤س} = ٩$
الحل :
نعلم أن $٩ = ٣^{٢}$
ولجعل الأساس متساوياً في طرفي المعادلة ، نكتب
$٣^{٤س} = ٣^{٢}$
$\therefore ٤ س = ٢ \Leftarrow س = \frac{١}{٢}$

**مثال (٢) :**
حل المعادلة : $٧^{س - ٣} = ٥^{س - ٣}$
**الحل :**
بما أن الاساسين ٧ ، ٥ موجبان وغير متساويين والأسان متساويان فإن هذا لا يتم إلا إذا كان كل من الأسين صفراً .
$\therefore س - ٣ = ٠ \Leftarrow س = ٣$

**مثال (٣) :**

حل المعادلة الأسية : $\left(\frac{١}{٣}\right)^{\text{س} - ١} = (٨١)^{-٢}$

**الحل :**

بتوحيد الأساسين : $٨١ = ٣^{٤}$

$\therefore \quad (٨١)^{-٢} = (٣^{٤})^{-٢} = ٣^{-٨}$

$\left(\frac{١}{٣}\right)^{\text{س} - ١} = ٣^{-(\text{س} - ١)} = ٣^{-\text{س} + ١}$

$٣^{-\text{س} + ١} = ٣^{-٨}$

$\therefore \quad -\text{س} + ١ = -٨$

$\therefore \quad -\text{س} = -٩ \Leftarrow \text{س} = ٩$

**مثال (٤) :**

حل المعادلة : $٣^{(٢\text{س}^٢ - ٧\text{س})} = \frac{١}{٢٧}$

**الحل :**

$٣^{(٢\text{س}^٢ - ٧\text{س})} = \frac{١}{٣^٣} = ٣^{-٣}$

$\therefore \quad ٢\text{س}^٢ - ٧\text{س} = -٣$

$٢\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ٣ = ٠$

$(٢\text{س} - ١)(\text{س} - ٣) = ٠$

$\therefore \quad \text{س} = \frac{١}{٢}$ أو $\text{س} = ٣$

**مثال (٥) :**

حل المعادلة : $٣^{\text{س} - ١} - ٣^{\text{س} - ٢} = ٥٤$

**الحل :**

$٣^{\text{س} - ٢}\,[٣ - ١] = ٥٤$

$٣^{\text{س} - ٢} \times ٢ = ٥٤$

$٣^{\text{س} - ٢} = ٢٧$

$٣^{س - ٢} = ٣^{٣}$

∴ س − ٢ = ٣

∴ س = ٥

**مثال (٦) :**

حل المعادلة :

$٣^{٢س} - ٤ \times ٣^{س+١} + ٢٧ = ٠$

**الحل :**

بفرض ص = $٣^{س}$

تصبح المعادلة : $ص^{٢}$ − ١٢ ص + ٢٧ = ٠

(ص − ٩) (ص − ٣) = ٠

ص − ٩ = ٠ ⇐ ص = ٩

∴ $٣^{س} = ٣^{٢}$

∴ س = ٢

أو ص − ٣ = ٠

$٣^{س} = ٣$

∴ س = ١

## تمرين (٢− ٤)

حل كلاً من المعادلات الأسية التالية ، ثم تحقق من صحة الحل :

(١) $٧^{٣س} = ٤٩$

(٢) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س} = ٨^{-١}$

(٣) $١١^{س - ٢} = ٨^{س - ٢}$

(٤) $٣^{٣س - ٢} = ٢٧^{٣س + ٢}$

(٥) $١٠٠^{س} = ٠,٠٠١$

(٦) $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س + ٦} = ٨١^{- س}$

(٧) $١٣^{٢س - ١} = \frac{١}{٥^{١ - ٢س}}$

(٨) $٣^{س - \frac{١}{٢}} = \left(\sqrt[٥]{٢٤٣}\right)^{٢}$

(٩) $٢^{س} \times \sqrt[٣]{٢^{٢}} = (١٦)^{-\frac{١}{٢}}$

(١٠) $٦^{س^{٢} + ٣س - ٢} = ٣٦$

(١١) $س^{س^{٢} - ٥س + ٦} = ١$

(١٢) $٢^{٦س} = ٤^{٥س + ٥}$

(١٣) $٥^{س} + ٥^{س + ١} = ٣٠$

(١٤) $٥^{٢س} - ٢٦ \times ٥^{س} + ٢٥ =$ صفر

## (٢– ٥) اللوغريثم :

سبق أن عرفنا الدالة الأسية د ( س ) = $أ^{س}$ حيث أ $\neq$ ١ وسبق أن عرفنا كذلك كيفية التعبير عن الحالة الأسية بحالة أخرى تسمى الصورة اللوغريثمية ، باعتبار أن لوغريثم العدد لأساس معين هو ذلك الأس الذي يرفع إليه الأساس ليعطى العدد . ونذكرك بتعريف اللوغريثم التالي :

**(٢– ٣) تعريف :**

إذا كان ص = $أ^{ن}$ حيث أ عدد حقيقى موجب لا يساوي الواحد ، وكان ن عدداً حقيقيـاً فإننا نسمي ن لوغريثـم العدد ص للأساس أ. ويرمز للعبارة : لوغريثم العـدد ص للأساس أ يساوي ن بالصورة المختصرة:

$لو_{أ}\, ص = ن$

وقد عرفنا سابقاً العلاقة المباشرة بين الأس واللوغريثم فمثلاً :

٨ = $٢^{٣}$ ⟺ $لو_{٢}$ ٨ = ٣

٤٩ = $٧^{٢}$ ⟺ لو ٤٩ = ٢

وبصورة عامة : ٧

س = $أ^{ن}$ ⟺ $لو_{أ}$ س = ن

وعرفنا أن العلاقة الأخيرة تساعد في ايجاد لوغريثمات الأعداد . فلايجاد $لو_{٣}$ ٩ نقول أن ٩ = $٣^{٢}$

وعلى ذلك $لو_{٣}$ ٩ = ٢

ويتضح من هذا أنه يمكن باستخدام التعريف التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغريثمية للعدد . وكذلك العكس تحويل الصورة اللوغريثمية إلى الصورة الأسية . كما يتضح من الأمثلة التالية :

**مثال (١) :**

حوّل كلاً مما يلي إلى الصورة اللوغريثمية :

( أ ) ١٢٥ = $٥^{٣}$ (ب) ١ = $٧^{٠}$ (جـ ) $\frac{١}{٨}$ = $٢^{-٣}$

**الحل :**

( أ ) $لو_{٥}$ ١٢٥ = ٣

(ب) $لو_{٧}$ ١ = صفر

(جـ ) $لو_{٢}$ $\frac{١}{٨}$ = −٣

**مثال (٢) :**

عبّر عن كل مما يلى بالصورة الأسية :

( أ ) $\text{لو}_{٤}\ ١٦ = ٢$ (ب) $\text{لو}_{٢٧}\ ١/٩ = \frac{-٢}{٣}$

(جـ) $\text{لو}_{١٠}\ ١٠\sqrt{١٠} = \frac{٣}{٢}$

**الحل :**

( أ ) $٤^{٢} = ١٦$ (ب) $٢٧^{\frac{-٢}{٣}} = \frac{١}{٩}$

(جـ ) $١٠^{\frac{٣}{٢}} = ١٠\sqrt{١٠}$

**مثال (٣) :**

جد قيمة كل مما يلي :

( أ) $\text{لو}_{٢}\ ١/١٦$ (ب) $\text{لو}_{٣}\ ٣\sqrt{٣}$ (جـ ) $\text{لو}_{١٠}\ ١$

**الحل :**

(أ ) $\because \frac{١}{١٦} = \frac{١}{٢^{٤}} = ٢^{-٤}$

$\therefore$ من التعريف $\text{لو}_{٢}\ ١/١٦ = -٤$

(ب) $٣\sqrt{٣} = ٣ \times ٣^{\frac{١}{٢}} = ٣^{\frac{٣}{٢}}$

$\therefore \text{لو}_{٣}\ ٣\sqrt{٣} = \frac{٣}{٢}$

(جـ ) $١ = ١٠^{\text{صفر}}$

$\therefore \text{لو}_{١٠}\ ١ =$ صفر .

**تمرين (٢– ٥)**

(١) حول كلاً مما يلي إلى الصورة اللوغريثمية :

( أ ) $٩^{٢} = ٨١$ (ب) $٣^{-١} = \frac{١}{٣}$

(جـ ) $٨^{-\frac{٢}{٣}} = \frac{١}{٤}$ (د ) $١٠^{-١} = ٠,١$

( هـ ) $١٠^{-٢} = ٠,٠١$ ( و) $٦^{\frac{٣}{٢}} = ٦\sqrt{٦}$

(٢) حول كلاً مما يأتي إلى الصورة الأسية : :

( أ ) $\text{لو}_{٨}٦٤ = ٢$ (ب) $\text{لو}_{٣}٨١ = ٤$

(جـ ) $\text{لو}_{٣}\frac{١}{٩} = -٢$ (د ) $\text{لو}_{٢}\frac{١}{٨} = -٣$

(هـ ) $\text{لو}_{ن}م = و$ ( و ) $\text{لو}_{ك}ك = ١$

(٣ ) جد قيمة كل من :

( أ ) $\text{لو}_{٣}٢٤٣$ (ب) $\text{لو}_{٥}٦٢٥$

(جـ ) $\text{لو}_{١١}\frac{١}{١٢١}$ (د ) $\text{لو}_{١٠}٠,٠٠١$

(هـ ) $\text{لو}_{٥}٥\sqrt{٥}$ ( و ) $\text{لو}_{أ}\sqrt[٣]{أ}$

**(٢– ٦) الدالة اللوغريثمية :**

عندما تعرضنا لمفهوم الدالة الأسية ذكرنا أن من خواص الدالة الأسية $د(س) = أ^{س}$ حيث $أ \in ح^{+} - \{١\}$ ، $س \in ح$ أنها دالة من نوع التقابل. من مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة . لذا فإن لهذه الدالة دالة عكسية تسمى الدالة اللوغريثمية.

**(٢– ٤) تعريف :**

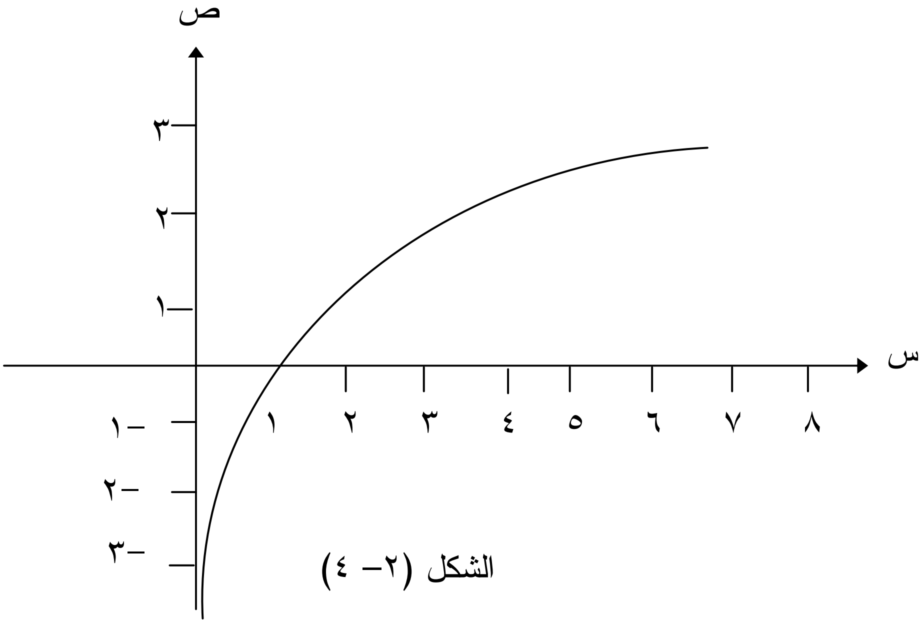
إذا كان أ ∋ ح$^{+}$ – { ١ } فإن

ص = لو$_{أ}$س ⟺ س = أ$^{ص}$

فإذا رسمنا المنحنى البياني للدالة ص = لو$_{٢}$س

نكوّن أولاً جدولاً كما يلي :

| س | $\frac{١}{٨}$ | $\frac{١}{٤}$ | $\frac{١}{٢}$ | ١ | ٢ | ٤ | ٨ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| لو$_{٢}$س | ٣– | ٢– | ١– | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |

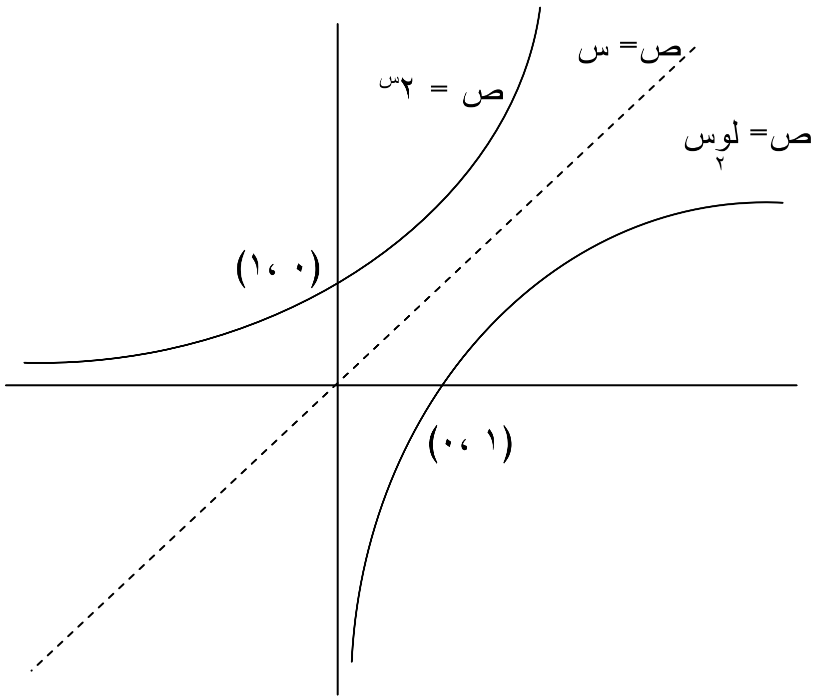



الشكل (٢– ٤)

وتلاحظ من الشكل (٤ – ٢) أن الدالة اللوغريثمية مجالها هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة . ومجالها المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح .

وأن منحنى الدالة اللوغريثمية يقطع المحور السيني عند النقطة (١ ، ٠) .

فإذا رسمنا على الشكل نفسه المنحنى البياني للدالة الأسية ص = ٢^س^ كما مر بنا سابقاً نجد أن المنحنيين يبدوان كما في الشكل (٤ – ٥) .




الشكل (٢– ٥)

وهما منحنيان متماثلان حول المستقيم ص = س لأن الدالة اللوغريثمية هي الدالة العكسية للدالة الأسية . وأن المنحنى البياني لأي دالة يكون متماثلاً مع المنحنى البياني للدالة العكسية لها حول المستقيم ص = س . وكما علمنا في منحنى الدالة الأسية أنه مهما اختلفت قيمة الأساس أ فإن المنحنى يمر بالنقطة

(٠ ، ١) ، فكذلك مهما اختلفت قيمة الأساس أ في الدالة اللوغريثمية فإن المنحنى البياني لها يمر بالنقطة (١ ، ٠) . ( وبما أن مجال الدالة اللوغريثمية هو $ح^+$ فينتج أن العدد صفر وكذلك أى عدد سالب ليس له لوغريثم .) .

**مثال (١) :**

جد مجال الدالة

ص = $لو_{أ}$ ( ١ – س )

**الحل :**

من تعريف الدالة اللوغريثمية :

∴ ١ – س > ٠ ⇐ س < ١

∴ المجال هو { س : س ∋ ح ، س < ١ }

**تمرين (٢– ٦ )**

(١) أرسم منحنى الدالة ص = $لو_{١٠}$ س

(٢) أرسم منحنى الدالة ص = $لو_{٣}$ س ، ١ ≤ س ≤ ٣

(٣) إذا كانت العلاقة بين شدة التيار الكهربائي ت والزمن ن هي : $لو_{٢}$ ت = ن

ارسم منحنى هذه العلاقة . ومن الرسم جد شدة التيار بعد زمن قدره $١\frac{١}{٢}$ ثانية.

(٤) ما مجال الدالة ص = $لو_{٣}$ ( ٢ س – ١ )

**(٢– ٧ ) أهم خواص الدالة اللوغريثمية :**

سنتعرض لآهم خواص الدالة اللوغريثمية ، وفى برهان النظريات الثلاث التالية إثبات لأهم هذه الخواص .

**نظرية (٢– ١) :**

إذا كانت $س_{١}$ ، $س_{٢} \in ح^{+}$ ، $أ \in ح^{+} - \{١\}$ فإن :

$$\text{لو}_{أ}\, س_{١}\, س_{٢} = \text{لو}_{أ}\, س_{١} + \text{لو}_{أ}\, س_{٢}$$

**البرهان :**

نفرض أن $\text{لو}_{أ}\, س_{١} = ص_{١}$

$\text{لو}_{أ}\, س_{٢} = ص_{٢}$

$\therefore\ س_{١} = أ^{ص_{١}}$ ، $س_{٢} = أ^{ص_{٢}}$

$\therefore\ س_{١}\, س_{٢} = أ^{ص_{١}} \times أ^{ص_{٢}} = أ^{ص_{١} + ص_{٢}}$

$\therefore$ من التعريف :

$\text{لو}_{أ}\, س_{١} س_{٢} = ص_{١} + ص_{٢}$

$= \text{لو}_{أ}\, س_{١} + \text{لو}_{أ}\, س_{٢}$

فعلى سبيل المثال نجد أن :

$\text{لو}_{أ}\ ٢٤ = \text{لو}_{أ}\ ٣ \times ٨ = \text{لو}_{أ}\ ٣ + \text{لو}_{أ}\ ٨$

$\text{لو}_{أ}\ ٥٥ = \text{لو}_{أ}\ ١١ \times ٥ = \text{لو}_{أ}\ ١١ + \text{لو}_{أ}\ ٥$

$\text{لو}_{٢}\ ٣ + \text{لو}_{٢}\ ٥ + \text{لو}_{٢}\ ٧ = \text{لو}_{٢}\ ٣ \times ٥ \times ٧ = \text{لو}_{٢}\ ١٠٥$

$\text{لو}_{٣}\ ٧ + \text{لو}_{٣}\ ٩ = \text{لو}_{٣}\ ٧ \times ٩ = \text{لو}_{٣}\ ٦٣$

**نظرية (٢– ٢) :**

إذا كانت س$_١$ ، س$_٢$ ∋ ح$^+$ ، أ ∋ ح$^+$ – { ١ } فإن :

$$لو_{أ} \frac{س_١}{س_٢} = لو_{أ} س_١ - لو_{أ} س_٢$$

**البرهان :**

نفرض أن $لو_{أ} س_١ = ص_١$ ، $لو_{أ} س_٢ = ص_٢$

$$\therefore س_١ = أ^{ص_١} ، س_٢ = أ^{ص_٢}$$

$$\frac{س_١}{س_٢} = \frac{أ^{ص_١}}{أ^{ص_٢}} = أ^{ص_١ - ص_٢}$$

$$لو_{أ} \frac{س_١}{س_٢} = ص_١ - ص_٢$$

$$= لو_{أ} س_١ - لو_{أ} س_٢$$

**مثلاً :**

$$لو_{٢} \frac{٧}{٣} = لو_{٢} ٧ - لو_{٢} ٣$$

$$لو_{أ} ١٥ - لو_{أ} ٣ = لو_{أ} \frac{١٥}{٣} = لو_{أ} ٥$$

**نظرية (٢– ٣) :**

إذا كانت س ∋ $ح^+$ ، أ ∋ $ح^+$ – { ١ } فإنه :
لأى عدد حقيقي ن يكون :
$لو_{أ} س^{ن} = ن \ لو_{أ} س$

**البرهان :**

نفرض أن $لو_{أ} س = ص$

∴ $س = أ^{ص}$ ( من التعريف )

∴ $س^{ن} = (أ^{ص})^{ن} = أ^{ن ص}$

∴ $لو_{أ} س^{ن} = ن \ ص$ ( من التعريف )

$= ن \ لو_{أ} س$

مثلاً : $لو_{أ} ١٦ = لو_{أ} ٢^{٤} = ٤ \ لو_{أ} ٢$

$لو_{ه} \sqrt[٣]{٧} = لو_{ه} ٧^{\frac{١}{٣}} = \frac{١}{٣} \ لو_{ه} ٧$

**مثال (١) :**

أثبت أن :

$$( لو_{١٠} \frac{١٧٠}{٧} - لو_{١٠} \frac{١٨}{٣٥} ) + لو_{١٠} \frac{٧٢}{٣٤} = ٢$$

**الحل :**

الطرف الأيمن

$= \text{لو}_{10} \left( \frac{170}{7} \div \frac{18}{35} \right) + \text{لو}_{10} \frac{72}{34}$

$= \text{لو}_{10} \left( \frac{170}{7} \times \frac{35}{18} \times \frac{72}{34} \right)$

$= \text{لو}_{10} 100 = \text{لو}_{10} 10^2 = 2\ \text{لو}_{10} 10 = 2$ ( لأن $\text{لو}_{10} 10 = 1$ )

= الطرف الأيسر .

**مثال : (٢) :** إذا كان الأساس ١٠ ، أثبت أن

$\text{لو} \frac{40}{9} + 2 \left( 2\ \text{لو}\ 5 + \text{لو}\ 6 \right) = 5$

**الحل :**

الطرف الأيمن :

$\text{لو} \frac{40}{9} + 4\ \text{لو}\ 5 + 2\ \text{لو}\ 6$

$= \text{لو}\ \frac{40}{9} \times 5^4 \times 6^2 = \text{لو}\ 100000$

$= \text{لو}\ 10^5 = 5\ \text{لو}\ 10 = 5$

= الطرف الأيسر .

**مثال (٣) :**

إذا علمت أن لو٧ = ٠,٨٤٥١ ، لو٢ = ٠,٣٠١٠

فجد قيمة لو٢٨

**الحل :**

لو٢٨ = لو ٤ × ٧

= لو ٤ + لو٧

$= \text{لو}\ 2^2 + \text{لو}\ 7$

= ٢لو٢ + لو٧

= ٢ × ٠,٣٠١٠ + ٠,٨٤٥١

= ٠,٦٠٢٠ + ٠,٨٤٥١

= ١,٤٤٧١

**تمرين (٢– ٧)**

(١) اختصر إلى أبسط صورة :

(أ) لو$_{٧}$ ١٥ + لو$_{٧}$ ٣٥ – لو$_{٧}$ ٢١

(ب) لو$_{٤}$ ٥٤ – ٢ لو$_{٤}$ ٣ + لو$_{٤}$ ١٢

(جـ) لو$_{س}$٩ + لو$_{س}$ ٧٢ – لو$_{س}$٨١

(٢) إذا كان الأساس ١٠ فأثبت أن :

(أ) لو $\frac{٢٥٦}{٣}$ +٣ لو $\frac{٥}{٣}$ + لو $\frac{٨١}{٣٢}$ = ٣

(ب) ٣ لو٠,٠٦ – لو٢١٦ + لو٨ + لو١٢٥ = –٣

(جـ) لو $\frac{٢٤٥}{٣٧٨}$ – لو $\frac{٤٩}{٨١}$ + لو $\frac{١٤}{١٥}$ = صفر

(د) $\frac{\text{لو٨ – ٣ لو٩}}{\text{لو٤ – ٤ لو٣}}$ = $\frac{٣}{٢}$

(٣) إذا علمت أن لو$_{أ}$ ٢٤ = ١,٣٨٠٢ ، لو$_{أ}$ ٦ = ٠,٧٧٨٢

فجد لو$_{أ}$ ٤

(٤) إذا علمت أن لو$_{١٠}$ ٢ = ٠,٣٠١٠ ، لو$_{١٠}$ ٣ = ٠,٤٧٧١

فجد قيمة كل من :

( أ ) لو$_{١٠}$ ٦٠     (ب) لو$_{١٠}$ $\frac{٥}{٦}$     ( جـ) لو$_{١٠}$ $\frac{٢٧}{٦٤}$

( د ) لو$_{١٠}$ ٠,٣     ( هـ ) لو$_{١٠}$ ٠,٠٢     ( د ) لو$_{١٠}$ ٠,٠٠٦

(٥) أثبت أن :

لو$_{أ}$ $\frac{٦}{٥}$ + لو$_{أ}$ $\frac{٥}{٦٦}$ − لو$_{أ}$ $\frac{١٣٢}{١٢١}$ + لو$_{أ}$ ١٢ = صفر

(٦) أثبت أن لو$_{أ}$ س ÷ لو$_{أ}$ ص = لو$_{ص}$ س

**(٢– ٨) المعادلات اللوغريثمية :**

درسنا سابقاً في هذا الباب المعادلات الأسية وكيفية حلها . فمثلاً إذا كان ٣$^{س}$ = ٢٧ فإن حل هذه المعادلة يكون بوضع العدد ٢٧ على الصورة ٣$^{٣}$ أي أن ٣$^{س}$ = ٣$^{٣}$ ومنها س = ٣ .

وسنتعرض فيما يأتي للمعادلات اللوغريثمية وكيفية حلها إذ يرتبط حلها بحل المعادلات الأسية . لأننا علمنا أن كل صورة لوغريثمية ص = لو$_{أ}$س يمكن تحويلها إلى الصورة الأسية س = أ$^{ص}$ . وتحتوى هذه الصورة على ثلاثة متغيرات أ ، س ، ص . بحيث إذا علم متغيران أمكن معرفة قيمة المتغير الثالث.

وفيما يأتى أمثلة لمعادلات لوغريثمية :

لو$_{٥}$س = ٢ ، لو$_{س}$ $\frac{١}{٦٤}$ = ٣ ، لو$_{٣}$ $\sqrt[٣]{٢٧}$ = س

تذكر أن حل المعادلة اللوغريثمية يرتبط بحل المعادلة الأسية المناظرة لها .

**مثال (١) :**

حل المعادلة لو$_{٢٥}$س = $\frac{١}{٢}$

**الحل :**

$لو_{25} س = \frac{1}{2}$

$\therefore س = 25^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5$

$\therefore س = 5$

**مثال (٢) :**

حل المعادلة : $لو_{س} \frac{1}{64} = 3$

**الحل :**

$لو_{س} \frac{1}{64} = 3$

$\therefore \frac{1}{64} = س^3$

$(\frac{1}{4})^3 = س^3$

$\therefore س = \frac{1}{4}$

**مثال (٣) :**

حل المعادلة : $لو_{3} 27\sqrt{3} = س$

**الحل :**

$لو_{3} 27\sqrt{3} = س$

$\therefore 27\sqrt{3} = 3^{س}$

$3^3 \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{س}$

$3^{\frac{7}{2}} = 3^{س} \Leftarrow س = \frac{7}{2}$

**مثال (٤) :**

حل المعادلة : $لو_{\frac{١}{س}} ٣٤٣ = -٣$

**الحل :**

$لو_{\frac{١}{س}} ٣٤٣ = -٣$

$\therefore ٣٤٣ = \left(\frac{١}{س}\right)^{-٣}$

$٧^{٣} = (س^{-١})^{-٣} = س^{٣}$

$\therefore س = ٧$

**تمرين (٢– ٨)**

حل كلاً من المعادلات اللوغريثمية التالية :

(١) $لو_{٢} (س - ١) = ٥$

(٢) $لو_{٢} \left(س + \frac{١}{٥}\right) = -٢$

(٣) $لو_{٥} \sqrt{س} = ٢$

(٤) $لو_{٣} \frac{١}{٢٧} = ص$

(٥) $لو_{س} ٤ = \frac{٢}{٥}$

(٦) $لو_{٢} \frac{١}{٣٢} = س$

(٧) $لو_{س} ٠,١ = ١$

(٨) $لو_{٦٤} س = \frac{٧}{٦}$

(٩) $لو_{٣} \frac{١}{٨١} = س - ٢$

(١٠) $لو_{٥} ٢٥ = ٨ س$

(١١) $لو_{١٠} ٠,١ = س + ١$

(١٢) $لو_{س} ٣\frac{٣}{٨} = \frac{٣}{٢}$

(١٣) لو$_{٨}$ (س+ ٣) = $\frac{١}{٣}$ (١٤) لو$_{١٦}$ ( س −١) = $\frac{١-}{٢}$

### (٢– ٩) اللوغريثمات العشرية باستخدام الآلة الحاسبة :

مر بنا سابقاً بالصف الثامن مفهوم اللوغريثمات العشرية ( أو العادية ) وهي اللوغريثمات التي أساسها ١٠ .وعندما يكون الأساس ١٠ تصبح اللوغريثمات مفيدة جداً في العمليات الحسابية نظراً ؛ لأن النظام العددى الذى نستخدمه في حياتنا اليومية أساسه ١٠ . وقد اتفق على كتابة لو$_{١٠}$س على الصورة لو س .ومر بنا أيضاً طريقة حساب اللوغريثمات العشرية باستخدام جداول خاصة أعدت لذلك تسمى جداول لوغاريثمات الأعداد .

ولكن بعد اكتشاف الآلة الحاسبة أصبح من الممكن استخدامها لإيجاد لوغريثم العدد مباشرة ونوضح ذلك بالأمثلة الآتية :

مثال (١) جد لو ٢٦,٥٣

الحل :

نكتب العدد على الشاشة ، ثم نضغط على المفتاح $\boxed{\text{Log}}$ وفقاً للترتيب التالي :

| 2 | 6 | . | 5 | 3 | Log |
|---|---|---|---|---|---|
| (١) | (٢) | (٣) | (٤) | (٥) | (٦) |

فيظهر على الشاشة مباشرة لوغريثم العدد وهو

$\boxed{1.42373725}$

وإذا أردنا تقريب اللوغريثم لأربعة أرقام عشرية فإن

لو ٢٦,٥٣ = ١,٤٢٣٧

ملاحظة : في نوع آخر من الآلات الحاسبة يكون الترتيب على النحو التالي :

| log | 2 | 6 | . | 5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| (١) | (٢) | (٣) | (٤) | (٥) | (٦) |

**مثال (٢)** : جد لو ٠,٢٦

الحل :

نضغط على المفاتيح التالية على التتابع :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | ٠ | 2 | 6 | log |

فنقرأ على الآلة الحاسبة العدد :

| |
|---|
| -0.585026652 |

∴ لو٠,٢٦ = −٠,٥٨٥٠ مقرّباً لأربعة أرقام عشرية

ملحوظة : عند البحث عن لو٠,٢٦ من جداول اللوغريثمات العشرية

نجد أن لو٠,٢٦ = ١̅,٤١٥٠

أي أن لو٠,٢٦ = −١ +٠,٤١٥٠ = −٠,٥٨٥

وهي نفس الإجابة على الآلة الحاسبة . والسبب في اختلاف الصورتين أن الكسر العشري في جداول اللوغريثمات يكون موجباً على الدوام .

مثال (٣) جد لو ٠,٠٠٠٥٢٤

الحل :

نضغط على المفاتيح بالتتابع الموضح أدناه :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ٠ | 0 | 0 | 0 | 5 | 2 | 4 | log |

يظهر العدد

| |
|---|
| -3.280668713 |

∴ لو٠,٠٠٠٥٢٤ = − ٣,٢٨٠٧ مقرباً لأربعة أرقام عشرية.

لاحظ أنه إذا استخدمنا جداول اللوغريثمات نجد أن :

لو٠,٠٠٠٥٢٤ = ٤̅,٧١٩٣ على الطالب أن يبين أن الصورتين متساويتان .

**تمرين (٢−٩)**

مستخدماً الآلة الحاسبة جد قيمة كل مما يأتي

١) لو ٥,١ ٢) لو٢٧,٧ ٣) لو٠,٠٣٢٧

٤) لو٢٥,٣٩ ٥) لو٤٠٠٠٠ ٦) لو٠,٠٠٦٢

**(١٠-٢) الأعداد المقابلة للوغريثمات العشرية :**

عرفنا في الدرس السابق كيفية إيجاد لوغريثم العدد باستخدام الآلة الحاسبة . أما إذا أردنا أن نوجد عدداً علم لوغريثمه (ويسمى العدد المقابل للوغريثم) ، فإننا نستخدم نفس الآلة لهذا الغرض .الأمثلة الآتية توضح الخطوات المتتابعة لإيجاد العدد المقابل للوغريثم معلوم :

مثال (١) جد العدد الذي لوغريثمه ١,٠٨٩٩

الحل :

نستخدم المفاتيح التالية على التتابع

| (٧) | (٦) | (٥) | (٤) | (٣) | (٢) | (١) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $10^x$ | 9 | 9 | 8 | 0 | . | 1 |

فنجد على الآلة العدد :

| |
|---|
| 12.29985524 |

∴ العدد الذي لوغريثمه ١,٠٨٩٩ هو ١٢,٣٠ مقرباً لرقمين عشريين .

ملاحظة في بعض الحاسبات تكون العملية $\boxed{10^x}$ وظيفة ثانوية للمفتاح log ،

عندئذ لابد من ضغط المفتاح $\boxed{\text{Shift}}$ قبل ضغط المفتاح $\boxed{10^x}$ في هذه

الحالة يكون تتابع ضغط المفاتيح لإيجاد العدد الذي لوغريثمه ١,٠٨٩٩ كما يلي:

| (٨) | (٧) | (٦) | (٥) | (٤) | (٣) | (٢) | (١) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $10^x$ | Shift | 9 | 9 | 8 | 0 | . | 1 |

وكما ذكرنا سابقاً فإن العملية تكتب أولاً ثم تليها كتابة العدد في بعض الآلات الحاسبة .

مثال (٢) إذا كان لو س = -١,٠٨٤٥ فجد قيمة س

الحل :

نستخدم التتابع :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| − | 1 | · | 0 | 8 | 4 | 5 | $10^{x}$ |

فيظهر العدد

| |
|---|
| 0.0823189 |

∴ س = ٠,٠٨٢٣ لأربعة أرقام عشرية
(ينبغي مراعاة الاختلاف بين أنواع الآلات الحاسبة).
الآن ننتقل إلى استخدام اللوغريثمات في العمليات الحسابية . سيكتشف الطالب أن دراسة اللوغريثمات العشرية تساعد على تسهيل العمليات الحسابية ولاسيما المعقدة منها ومن أمثلة ذلك ما يلي :
مثال (٣) حل المعادلة :

$$٣^{س} = ٧$$

الحل : س لو٣ = لو٧

$$س = \frac{لو\ ٧}{لو\ ٣}$$

نستخدم الآلة بالترتيب الآتي :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 7 | log | ÷ | 3 | log |

يظهر العدد 1.771243749
∴ س =١,٧٧١٢ لأربعة أرقام عشرية
في نوع آخر من الحاسبات يكون الترتيب كالآتي :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| log | 7 | ÷ | log | 3 |

مثال (٤) بلغ تعداد السكان في السودان في عام ١٩٧٣م ، ١٤,١ مليوناً وفي عام ١٩٨٣م كان ٢٠,٥ مليوناً ، أحسب معدل النمو ر بناءًا على القاعدة :

$$ع_1 = ع_2\ (1+ر)^{ن} \quad \text{حيث}$$

$ع_1$ تعداد السكان في عام ١٩٨٣

$ع_2$ تعداد السكان في عام ١٩٧٣

ن الفترة الزمنية بين التعدادين = ١٠

الحل :

من القاعدة $ع_1 = ع_2\ (1+ر)^{ن}$

$$\frac{ع_1}{ع_2} = (1+ر)^{ن}$$

باخذ لوغريثم الطرفين :

$$لو \frac{ع_1}{ع_2} = لو\ (1+ر)^{ن}$$

$$لوع_1 - لوع_2 = ن\ لو\ (1+ر)$$

$$\therefore لو\ (1+ر) = \frac{لوع_1 - لوع_2}{ن}$$

بتعويض قيم $ع_1$ ، $ع_2$ ، ن

$$\therefore لو\ (1+ر) = \frac{لو ٢٠,٥ - لو ١٤,١}{١٠}$$

باستخدام الآلة الحاسبة نحصل على

١+ر = ١,٠٣٨١ مقرباً لأربعة أرقام عشرية

ر=٠,٠٣٨١

ر= ٣,٨١ % (في صورة نسبة مئوية)

∴.معدل نمو السكان في السودان في الفترة ٧٣-١٩٨٣م هو ٣,٨١%

## تمرين (٢-١٠)

١) جد قيمة س في كل مما يأتي مقرباً لأربعة أرقام عشرية :

أ) لو س = ١,١٩    ب) لو س = −٢,٢٤

ج) لو س = ٤,٦١٦١    د) لو س = −٠,٠١٨٧

٢) جد الأعداد المقابلة لكل من اللوغريثمات التالية :

أ/ ٢,٧٥٤    ب/ −٠,٢٨٧

ج/ −٢,٧٤٤٥    د/ ٥

٣) إذا كان معدل نمو السكان في الفترة ٨٣− ١٩٩٣م في السودان هو ٣%
وكان تعداد السكان في العام ٨٣ هو ٢٠,٥ مليوناً .
أحسب العدد المتوقع للسكان في السودان في العام ١٩٩٣م مستخدماً القاعدة :

$ع_{٩٣} = ع_{٨٣} (١ + ر)^{ن}$ حيث :

ر معدل النمو.

ن الفترة الزمنية بين التعدادين .

٤) إذا كان القوة المحددة للإبصار (ل) لتلسكوب قطر عدسته (ق) تعطى حسب العلاقة : ل =٨,٨ +٥,١ لو ق

جد قيمة القوة المحددة للإبصار لتلسكوب قطر قاعدته ٨ بوصات.

## تمرين عام

١) جد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\left(\frac{٢٧}{٦٤}\right)^{\frac{٢}{٣}}$    ب) $(٢٥)^{\frac{-٣}{٢}}$    ج) $(٠,١٢٥)^{\frac{١}{٣}}$    د) $\left(\frac{١٦}{٨١}\right)^{\frac{-٣}{٤}}$

هـ) $\text{لو}_{٣}\, ٩\sqrt{٣}$    و) $\text{لو}_{٦}٩ + \text{لو}_{٦}٨ - \text{لو}_{٦}٢٧ - \text{لو}_{٦}١٦$

ز) $\frac{\text{لو } ٨١}{\text{لو}\sqrt{٢٧}}$    ح) لو ٢٥ +لو ٢ + لو ٢٠− ١

٢) اختصر :

أ) $(٢\text{س}^{٣}\text{ص}^{-١})^{-٢}$ ب) $(٤\,\text{أ}^{-٢})^{-\frac{١}{٢}}$ ج) $\left(\frac{١٦\text{س}^{٤}}{٢٥\text{ص}^{٦}}\right)^{-\frac{٣}{٢}}$

د) $\text{لو}_{٢}\,\text{س} + ٥\,\text{لو}_{٢}\,\text{ص}$ هـ) ٢ لو ٣ + لو ٥ − لو ٣ + لو ٢٥

٣) حل المعادلات الآتية :

أ) $٥^{٢\text{س}} = \sqrt{٥}$ ب) $٩^{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦} = ١$

ج) $\left(\frac{١}{٣}\right)^{\text{س}+٦} = ٨١^{-\text{س}}$ د) $\text{س}^{\frac{٢}{٣}} - \text{س}^{\frac{١}{٣}} - ١٢ = ٠$

هـ) $٢^{٢\text{س}+١} - ٣ \times ٢^{\text{س}+٣} + ٢^{٦} = ٠$ و) $\text{لو}_{٨}(\text{س}+٣) = \frac{١}{٣}$

ز) $\text{لو}_{\text{س}-١}\,٣٢ = ٥$ ح) $\text{لو}_{٢}\,\text{س} = \text{لو}_{٢}\,١٠ - ١$

ي) $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} = \text{لو}_{\text{أ}}\,٢٧ - ٢\,\text{لو}_{\text{أ}}\,٦ + ٤\,\text{لو}_{\text{أ}}\,٢$

٤) إذا كان $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} = ٢$ ، $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص} = ٣$ جد قيمة كل من

أ) $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س} \times \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{ص}$ ب) $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}^{٣}\text{ص}^{٢}$ ج) $\text{لو}_{\text{أ}}\,\frac{\text{ص}^{٥}}{\text{س}^{٨}}$

٥) إذا كان لو ٢ = م ، لو ٣ = ن جد لو ٠,٣٧٥ بدلالة م ، ن .

٦) إذا كان لو ٢ = ٠,٣٠١٠ ، لو ٣ =٠,٤٧٧١ أحسب قيمة :

أ) لو $\frac{٩}{١٦}$ ب) لو ٥

٧) إذا كان $\text{لو}_{\text{ص}}\text{س}$ = هـ فأثبت أن ص = $\text{س}^{\frac{١}{\text{هـ}}}$ ومن ثم أثبت أن :

$$\text{لو}_{\text{س}}\text{ص} = \frac{١}{\text{لو}_{\text{ص}}\text{س}}$$

٨) جد قيم س ، ص في المعادلتين :

$$\text{لو}_{١٠}\text{ س} + \text{لو}_{١٠}\text{ ص} = ١$$

$$\text{لو}_{١٠}\text{س} - \text{لو}_{١٠}\text{ص} = \text{لو}_{١٠}\frac{٥}{٢}$$

٩) جد قيمة $(١٠)^{٠,٣٦}$ مقرباً الإجابة لرقمين عشريين .

١٠)حل المعادلة $٥^{\text{س}}$ =١٢ مقرباً الإجابة لأربعة أرقام عشرية.

**تذكر أن :**

(١) $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$

(٢) $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$

(٣) $أ^{-م} = \frac{١}{أ^{م}}$

(٤) $(أ ب)^{م} = أ^{م} ب^{م}$

(٥) $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$

(٦) $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{م} = \frac{أ^{م}}{ب^{م}}$

(٧) $أ^{صفر} = ١$

(٨) $أ^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{س^{م}}$

(٩) إذا كان $ص = لو_{أ} س \Leftrightarrow س = أ^{ص}$

(١٠) $لو_{أ} س_١ س_٢ = لو_{أ} س_١ + لو_{أ} س_٢$

(١١) $لو_{أ} \frac{س_١}{س_٢} = لو_{أ} س_١ - لو_{أ} س_٢$

(١٢) $لو_{أ} س^{ن} = ن\ لو_{أ} س$

# الوحدة الثالثة :

# الجذور الصم

## أهداف الوحدة الثالثة

بعد نهاية هذه الوحدة يتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن :

١. يميز بين مجموعات الأعداد .
٢. يدرك أن الجذور الصم ما هي إلا أعداد نسبية .
٣. يعرف الجذور الصم .
٤. يحول الجذور إلى جذور صم والعكس.
٥. يجري العمليات الأربع على الجذور الصم .

# الوحدة الثالثة
# الجذور الصم

**(٣-١) تمهيد:**

من دراستنا السابقة عرفنا بعض مجموعات الأعداد ومنها :

**١) مجموعة الأعداد الطبيعية :**

هي مجموعة غير منتهية تبدأ بالعنصر واحد ونرمز لها بالحرف ط .

ط = {١ ، ٢، ٣ ، ...}

**٢) مجموعة الأعداد الكلية :**

هي مجموعة غير منتهية تحتوي على الأعداد الطبيعية بالإضافة إلى الصفر ونرمز لها بالحرف ك .

ك = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣، ... }

**٣) مجموعة الأعداد الصحيحة :**

هي مجموعة غير منتهية تحتوي أعداد موجبة وأعداد سالبة بالإضافة إلى الصفر ونرمز لها بالحرف ص

ص= { ... ،-٣ ، -٢ ،-١ ، ٠، ١ ، ٢ ، ٣ ، ...}

**٤) مجموعة الأعداد النسبية :**

هي مجموعة غير منتهية تكتب جميع عناصرها في صورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب ∈ ص ، ب ≠ ٠ و نرمز لها بالحرف ن . ( لماذا ب ≠ ٠.)

ن = { $\frac{أ}{ب}$ : أ ، ب ∈ ص، ب ≠ ٠ }

**أمثلة لأعداد نسبية :**

أ/ الأعداد الطبيعية والكلية والصحيحة ٥ ، −٧ ، صفر .

ب/ الكسور العادية والمركبة . $\frac{١}{٢}$ ، $١\frac{١}{٢}$

ج/ الكسور العشرية ( المنتهية والدورية ) ٠,٧ ، $٠,\overline{٧}$

د/ جذور الأعداد المربعات $\sqrt{٤}$ ، $\sqrt{٤٩}$

ه/ **الأعداد غير النسبية:**

هي الأعداد التي لا يمكن وضعها في صورة $\frac{أ}{ب}$ نرمز لها بالحرف ن*

**أمثلة لأعداد غير نسبية :**

أ/ جذور الأعداد ليست مربعات ( الجذور الصم)

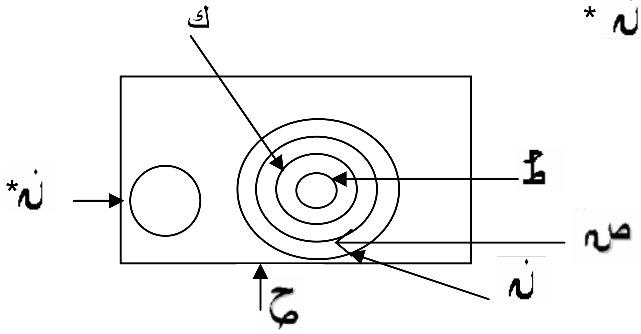
$\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٧}$ ، $\sqrt[٣]{٥}$ ، $\sqrt[٤]{١٧}$

ب/ الأعداد π ، ⟵ ٠,١٠١١٠٠١١١٠٠٠١١١١

٦) **الأعداد الحقيقية :**

هي مجموعة غير منتهية تحتوي على الأعداد النسبية وغير النسبية ونرمز لها بالحرف ح كما في الشكل (٣-١)

ح = ن ∪ ن *




الشكل (٣-١)

## تمرين (١)

أجري العمليات التالية :

١) -٤ + (-٩)

٢) -٤ + ٩

٣) ٤ + (-٩)

٤) -٤ +٤

٥) ٤ -٩

٦) -٤ -٩

٧) -٤ - (-٩)

٨) ٤ - (-٩)

٩) -٩ - (-٤)

١٠) صفر - ٩

١١) -٤ - (-٤)

١٢) $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٣}$

١٣) $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣}$

١٤) $\frac{١}{٣} \div \frac{١}{٣}$

١٥) $\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣}$

١٦) ١,٤٥ − ٠,٥٣٧
١٧) ٣,٠٢ + ٢,٣
١٨) ٠,٤ × ٠,٧
١٩) ٠,٧ × $\overline{٠,٧}$
٢٠) $٩,\overline{٧}$ − $٧,\overline{٩}$

**(٣−٢) الجذور الصم :**

الجذور الصم (مفردها الجذر الأصم) هي الأعداد الحسابية التي لا يمكن إيجاد قيمتها بالضبط ، وإنما يمكن ذلك إلى درجة من درجات التقريب المطلوبة مثلاً $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٧}$ ، $\sqrt[٣]{٣}$ ، $\sqrt[٤]{١٠}$ كلها جذور صم (أعداد غير نسبية).

أما $\sqrt{٩}$ ، $\sqrt[٣]{\frac{٢٧}{٨}}$ ، $\sqrt[٥]{٣٢}$ فيمكن إيجاد قيمتها ٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ٢ بالتوالي ولهذا ليست جذور صم .

تعريف (٣−١) :

إذا كان أ ∈ ح ، ن ∈ ط فإن كل عدد حقيقي س يحقق المعادلة أ = س$^{ن}$ يسمى جذراً نونياً للعدد أ . ويكتب س = $\sqrt[ن]{أ}$

**نظرية (٣−١) :**

إذا كان أ ، ب ∈ ح ، أ ≤ ٠ ، ب ≤ ٠
ن ∈ ط ، ن ≤ ٢ فإن :

١ / $\sqrt[ن]{أب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$

٢ / $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$ ، ب $\neq$ ٠

وإذا كان أحد العددين أو كلاهما سالباً ، نفرض ن فردياً .

مثال (١)

جد الناتج فيا يلي :

أ/ $\sqrt[٣]{١٢٥} = \left((٥)^{٣}\right)^{\frac{١}{٣}} = ٥$

ب/ $\sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$

ج/ $\sqrt[٥]{٣٢} = ٢$

د/ $\sqrt[٤]{١٦} = ٢$

ه/ $\sqrt{س^{٢} ص^{٢}} =$ س ص

مثال (٢)

اختصر لأبسط صورة

أ. $\sqrt{٢٧} \times \sqrt{٤٨} = \sqrt{٩} \times \sqrt{٣} \times \sqrt{١٦} \times \sqrt{٣}$

$= ٣ \times \sqrt{٣} \times ٤ \times \sqrt{٣}$

$= ٣ \times ٤ \times \sqrt{٣} \times \sqrt{٣}$

$= ٣ \times ٤ \times ٣$

$= ١٢ \times ٣$

$= ٣٦$

ب. $\frac{١٨}{\sqrt{٧٢}} = \frac{١٨}{\sqrt{٣٦} \times \sqrt{٢}}$

$= \frac{١٨}{٦ \times \sqrt{٢}}$

$= \frac{٣}{\sqrt{٢}}$

$= \frac{٣}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$

$= \frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$

ملحوظة

يفضل رياضياً أن يكون المقام خالياً من الجذور الصم ( إنطاق المقام )

أكمل الآتي

$$\frac{١}{\sqrt{٢}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \frac{١}{\sqrt{٣}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ج. $$\frac{\sqrt{٢٠} - \sqrt{٨}}{\sqrt{٢} - \sqrt{٥}} = \frac{\sqrt{٤} \times \sqrt{٥} - \sqrt{٤} \times \sqrt{٢}}{\sqrt{٢} - \sqrt{٥}}$$

$$= \frac{٢\sqrt{٥} - ٢\sqrt{٢}}{\sqrt{٢} - \sqrt{٥}}$$

$$= \frac{٢\,(\sqrt{٥} - \sqrt{٢})}{(\sqrt{٢} - \sqrt{٥})}$$

$$= ٢ \times (-١)$$

$$= -٢$$

**مثال (٣)**

حول هذه الجذور إلى جذور صم

أ/ $٢\sqrt{٣} = \sqrt{٤ \times ٣}$

$= \sqrt{١٢}$

ب/ $\frac{١}{٣}\sqrt{٢٧} = \sqrt{\frac{١}{٩} \times ٢٧}$

$= \sqrt{٣}$

## تمرين (٣-٢)

أ. ضع كلا من المقادير الآتية في أبسط صورة :

١/ $\sqrt{٨٠}$    ٢/ $\sqrt{١٨}$    ٣/ $\sqrt{٥٤}$    ٤/ $\sqrt{٤٩٠}$

ب. حول هذه الجذور إلى جذور صم :

١/ $٥\sqrt{٧}$    ٢/ $\frac{١}{٢}\sqrt{٤٨}$    ٣/ $٢\sqrt[٣]{٣}$    ٤/ $٤\sqrt{٢}$

ج. ضع ما يأتي ليكون المقام خالياً من الجذور :

١/ $\frac{٩}{\sqrt{٣}}$    ٢/ $\frac{١}{\sqrt{٥}}$    ٣/ $\frac{١٥}{\sqrt{٥}}$    ٤/ $\frac{٢}{\sqrt{٥٠٠}}$

د. جد الآتي:

١. $\sqrt{١٢} \times \sqrt{٤٨}$

٢. $\frac{\sqrt{١٢} - \sqrt{٨}}{\sqrt{٢} - \sqrt{٣}}$

## (٣-٣) العمليات الأربع في الجذور الصم :

١. **جمع وطرح الجذور الصم :**

يمكن جمع وطرح المقادير المتشابهة في الجذور الصم ، أمثلة لمقادير متشابهة من الجذور الصم :

أ/ $٢\sqrt{٣}$ ، $-٤\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣}$

ب/ $3\sqrt[3]{7}$ ، $5\sqrt[3]{7}$

**مثال (١)**

جد الناتج فيما يلي :

أ. $4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

ب. $6\sqrt{5} - 5\sqrt{5} = \sqrt{5}$

ج. $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + \sqrt{11} = 2\sqrt{2} + \sqrt{11}$

**مثال (٢)**

أثبت أن

$$\sqrt{48} + \sqrt{12} - 6\sqrt{\frac{1}{3}} = 4\sqrt{3}$$

الحل

الطرف الأيمن $= \sqrt{48} + \sqrt{12} - 6\sqrt{\frac{1}{3}}$

$= 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$

$= 4\sqrt{3}$

**٢. ضرب الجذور الصم :**

ضرب الجذور الصم كضرب المقادير الجبرية

مثال (١)

جد الناتج فيما يلي :

أ/ $\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{3 \times 2}$

$= \sqrt{6}$

ب/ $\sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}$

ج/ $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(2\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2 \times 3 - \sqrt{6} + 4\sqrt{6} - 2\times 2$

$= 6 - \sqrt{6} + 4\sqrt{6} - 4$

$= 2 + 3\sqrt{6}$

د/ $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) = 5 + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 4$

$= 5 - 4$

$= 1$

ه/ $(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = 5 - 3$

$= 2$

و/ $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})^2 = 3 + 4\sqrt{6} + 8$

$= 11 + 4\sqrt{6}$

ملحوظة

نسمي $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ مرافق $\sqrt{5} + \sqrt{3}$

أكمل الجدول :

| الكمية الجذرية | مرافق الكمية الجذرية | حاصل ضربهما |
|---|---|---|
| $\sqrt{٧} + \sqrt{٥}$ | $\sqrt{٧} - \sqrt{٥}$ | $٧ - ٥ = ٢$ |
| $٤\sqrt{٣} - ٢$ | | |
| $\sqrt{س} + \sqrt{ص}$ | | |
| $٢ - \sqrt{٣}$ | | |

**٣ / قسمة الجذور الصم :**

عند قسمة الجذور الصم يجب ضرب البسط والمقام في مرافق المقام.

**مثال (١)**

ضع الآتي في أبسط صورة :

أ/ $$\frac{١}{\sqrt{٥} - ٢} = \frac{١}{\sqrt{٥} - ٢} \times \frac{\sqrt{٥} + ٢}{\sqrt{٥} + ٢}$$

$$= \frac{\sqrt{٥} + ٢}{٥ - ٤}$$

$$= \sqrt{٥} + ٢$$

ب/ $\dfrac{\sqrt{٣} + ١}{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}} = \dfrac{\sqrt{٣} + ١}{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}} \times \dfrac{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}}{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}}$

$$= \frac{٣ - \sqrt{٣} \times \sqrt{٢} + \sqrt{٣} - \sqrt{٢}}{٣ - ٢}$$

$$= ٣ - \sqrt{٦} + \sqrt{٣} - \sqrt{٢}$$

**مثال (٢)**

ضع المقدار $\sqrt{٦ + ٢\sqrt{٨}}$ في أبسط صورة

الحل

$$\sqrt{٦ + ٢\sqrt{٨}} = ٤ + ٢\sqrt{٨} + ٢$$

$$= (\sqrt{٤} + \sqrt{٢})^{٢}$$

$$= (٢ + \sqrt{٢})^{٢}$$

$$\therefore \sqrt{٦ + ٢\sqrt{٨}} = \sqrt{(٢ + \sqrt{٢})^{٢}}$$

$$= ٢ + \sqrt{٢}$$

نلاحظ أن ٦ = ٤ + ٢ ، ٨ = ٤ × ٢

وعليه يمكن وضع القاعدة الآتية

$$\sqrt{أ + ٢\sqrt{ب}} = \sqrt{جـ} + \sqrt{د}$$

حيث أ = جـ + د ، ب = جـ × د

**مثال (٣)**

حل المعادلة $\sqrt{س + ٥} = س - ١$

الحل :

$\sqrt{س + ٥} = س - ١$ (نربع الطرفين)

$(\sqrt{س + ٥})^٢ = (س - ١)^٢$

$س + ٥ = س^٢ - ٢س + ١$

$س^٢ - ٢س - س + ١ - ٥ = ٠$

$س^٢ - ٣س - ٤ = ٠$

$(س - ٤)(س + ١) = ٠$

أما $س - ٤ = ٠$ $\therefore$ $س = ٤$

أو $س + ١ = ٠$ $\therefore$ $س = -١$

$\therefore$ مجموعة الحل $\{٤\}$ (-١ لا يحقق المعادلة)

ملحوظة : في هذا النوع من المسائل التأكد من الحل بالتحقيق جزء من الحل.

**تمرين (٣-٣)**

ضع كلا مما يأتي في أبسط صورة

١. $٥\sqrt{٢} - ٣\sqrt{٢}$

٢. $\sqrt{٣} + \sqrt{٢٧}$

٣. $٣\sqrt{١٨} - ٢\sqrt{٨}$

٤. $\sqrt{\frac{٥}{٣}} - \sqrt{\frac{٣}{٥}}$

٥. $٤\sqrt{٢}\,(\sqrt{٨} - \sqrt{٣٢})$

٦. $\sqrt{٨١\,\text{س}^{٤}} - ٣\,\text{س}^{٢}$

٧. $(٢ - ٣\sqrt{٥})\,(٥ + ٢\sqrt{٣})$

٨. $\left(٣\sqrt{\frac{١}{٢}} + ٢\sqrt{\frac{١}{٢}}\right)^{٢}$

٩. $(٧\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٧})^{٢}$

١٠. $\frac{١}{٣\sqrt{٣} - ٢}$

١١. $\frac{١}{\sqrt{٢} - ١} + \frac{١}{\sqrt{٢} + ١}$

١٢. $\frac{\sqrt{٧} + \sqrt{٥}}{\sqrt{٧} - \sqrt{٥}} + \frac{\sqrt{٧} - \sqrt{٥}}{\sqrt{٧} + \sqrt{٥}}$

١٣. $\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٨}}$

١٤. $\sqrt{٢٠ - ٢\sqrt{٧٥}}$

**تمرين عام**

أ / جد قيمة ما يأتي :

١/ $\frac{١}{١ + \sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢} + \sqrt{٣}}$

٢/ $\sqrt{٧ + ٤\sqrt{٣}}$

٣/ $\sqrt{٥ - \sqrt{٢٤}}$

٤/ $\frac{١}{\sqrt{٥} - ١} + \frac{١}{\sqrt{٥} + ١}$

٥/ $\dfrac{\sqrt{٢٠} - \sqrt{٢٨}}{\sqrt{٧} - \sqrt{٥}}$

ب/ حل المعادلات الآتية :

١/ $س - \sqrt{س^{٢} - ٣} = ١$

٢/ $\sqrt{س - ١} + \sqrt{س + ٤} = ٥$

٣/ $\sqrt{س - \sqrt{س - ١}} = ١$

ج/ إذا كانت $س = \dfrac{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}}{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}$

جد الآتي :

(i) $س^{٢}$ (ii) $س^{٢} - \dfrac{١}{س^{٢}}$

**تذكر أن** :

١ /الجذور الصم (مفردها الجذر الأصم) هي الأعداد الحسابية التي لا يمكن إيجاد قيمتها بالضبط ، وإنما يمكن ذلك إلى درجة من درجات التقريب المطلوبة مثلاً $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٧}$ ، $\sqrt[٣]{٣}$ ، $\sqrt[٤]{١٠}$ كلها جذور صم (أعداد غير نسبية).

٢/ إذا كان أ ، ب ∈ ح ، أ ≥ ٠ ، ب ≥ ٠ ، ن ∈ ط ، ن ≥ ٢ فإن :

$$\sqrt[ن]{أ ب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$$

$$\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}} \quad ، ب \neq ٠$$

وإذا كان أحد العددين أو كلاهما سالباً ، نفرض ن فردياً .

# الوحدة الرابعة :

# نظرية الباقي والعامل

**أهداف الوحدة الرابعة**

بعد نهاية هذه الوحدة يتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن :

١ / يعرّف نظرية الباقي .
٢ / يقسم المقادير الجبرية باستخدام نظرية الباقي .
٣ / يجد عوامل المقادير الجبرية باستخدام نظرية الباقي .
٤ / يحلل المقادير الجبرية باستخدام نظرية الباقي .
٥ / يعرّف نظرية العامل .
٦ / يحل المعادلات الجبرية باستخدام نظرية الباقي (إيجاد جذور المعادلة).

## الوحدة الرابعة
## نظرية الباقي والعامل

**(٤–١) نظرية الباقي :**

يعلم الطالب أنه عند قسمة العدد ٦٧ على ١٥ يكون خارج القسمة ٤ والباقي ٧. وهذه النتيجة يمكن كتابتها بالصورة : ٦٧ = ١٥ × ٤ + ٧

هذا المفهوم يمكن تطبيقه أيضاً عندما نقسم دالة كثيرة حدود على دالة من الدرجة الأولى موضحين ذلك بالمثال التالي :

**مثال (١)** جد خارج القسمة والباقي عند قسمة
د (س) = س$^{٣}$ – ٤س$^{٢}$ + ٧س – ١ على (س –٢) .

الحل :

نستخدم طريقة القسمة المطولة :

س$^{٢}$ – ٢س + ٣

س$^{٣}$ – ٤س$^{٢}$ + ٧س – ١ | س–٢

س$^{٣}$ – ٢س$^{٢}$

– ٢س$^{٢}$ + ٧س – ١

–٢ س$^{٢}$ + ٤ س

٣س – ١

٣س – ٦

٥

خارج القسمة = س$^{٢}$ –٢س + ٣ والباقي = ٥

وعليه يمكن أن تكتب نتيجة ما توصلنا إليه من حل هذا المثال في الصورة :

د (س) = س$^{٣}$ − ٤س$^{٢}$ + ٧س − ١ = (س−٢) (س$^{٢}$−٢س+٣) + ٥
إذا عوضنا س = ٢ في هذه المتطابقة نحصل مباشرة على الباقي حيث :
د( ٢) = ٠ + ٥ = ٥
لاحظ أن العدد ٢ هو العد الذي يجعل (س−٢) صفراً .
عموماً إذا قسمنا دالة كثيرة حدود د (س) على (س − أ) حيث أ ∈ ح
وكان خارج القسمة دالة هـ (س) والباقي ب
فإن العلاقة بين هذه المقادير تمثلها المتطابقة :
د (س) = (س−أ) . هـ (س) + ب
بتعويض س = أ في هذه المتطابقة نجد أن :
د (أ) = ب وهي نظرية الباقي التي نعّرفها كما يلي :

> إذا قسمنا دالة كثيرة حدود د(س) على س− أ فإن الباقي = د (أ) . حيث أ هو العدد الذي يجعل (س−أ) = ٠ .

لاحظ أن هذه النظرية توفر لنا طريقة بسيطة جداً لحساب الباقي دون حوجة لإجراء القسمة المطولة لكنها لا تمكننا من معرفة خارج القسمة بطريقة مباشرة .

تدريب : على الطالب حل المثال السابق بطريقة القسمة التركيبية.

**مثال (٢)**

جد الباقي عند قسمة س$^{٣}$ + ٤س$^{٢}$ −٢س −٩ على (س+٣).

الحل:

د(س) = س$^{٣}$ + ٤س$^{٢}$ −٢س −٩

العدد الذي يجعل س+٣ =٠ هو −٣

الباقي = د (−٣)

= (−٣)$^{٣}$ + ٤ ×(−٣)$^{٢}$ −٢× (−٣)−٩

$= -٢٧ + ٣٦ + ٦ - ٩$

$= ٦$

**مثال (٣)** جد الباقي عند قسمة ٢س$^{٣}$ – ٥س$^{٢}$ +٣ على ٢س–١

الحل :

د(س) = ٢س$^{٣}$ –٥س$^{٢}$ +٣

لاحظ أن العدد الذي يجعل ٢س–١ =٠ هو $\frac{١}{٢}$

∴ الباقي = د($\frac{١}{٢}$) = ٢× $\frac{١}{٨}$ – ٥ × $\frac{١}{٤}$ + ٣

$= \frac{١}{٤} - \frac{٥}{٤} + ٣ = ٢$

**مثال (٤)** إذا كان باقي قسمة س$^{٢}$ + جـ س+ ٧ على س–٢ يساوي –٩ ، جد قيمة جـ.

الحل

د(س) = س$^{٢}$ + جـ س+ ٧

معطى د(٢) = –٩

∴(٢)$^{٢}$ + جـ ×(٢) +٧ = –٩

٤+٢جـ +٧ = –٩

٢جـ = –٢٠

جـ = –١٠

**(٤–٢) نظرية العامل**

علمنا من نظرية الباقي أنه عندما نقسم د(س) على س– أ فإن الباقي = د(أ) .

حيث أ هو العدد الذي يجعل س−أ =٠ في الحالة التي يكون فيها د(أ) = صفر نقول أن د(س) قابلة للقسمة على (س− أ) وعندئذ يكون (س−أ) عاملاً للدالة د(س).

**تعريف :**

| |
|---|
| يكون (س−أ) عاملاً للدالة كثيرة الحدود د(س) إذا وفقط إذا كان د (أ) = صفراً |

بواسطة هذه النظرية يمكننا تحليل كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة فأكثر .

**مثال (٥)** حلل تحليلاً كاملاً للدالة : س$^{٣}$−٧س −٦

الحل :

لتكن د (س) = س$^{٣}$−٧س −٦

نختار العدد أ من بين عناصر المجموعة {±١ ، ±٢ ،±٣، ±٦}

وهي عوامل العدد ٦ في د (س) .

د(١) = ١ −٧−٦ = −١٢ ≠ ٠ ∴ س−١ ليس عاملاً للدالة

د (−١) = −١ + ٧−٦ = ٠ ∴ س − (−١) = س+١ عامل للدالة ثم بإجراء القسمة المطولة

س$^{٢}$ − س − ٦

س +١ ) س$^{٣}$ −٧س − ٦

س$^{٣}$ + س$^{٢}$

−س$^{٢}$ −٧س − ٦

− س$^{٢}$ − س

− ٦س − ٦

− ٦س − ٦

٠ ٠

∴ س$^{٣}$ –٧س – ٦ = (س+١) (س$^{٢}$ – س – ٦ )
= (س+١) (س+٢) (س–٣)

كما يمكن الاستمرار بنفس الطريقة الأولى مع بقية عوامل العدد ٦ .

**مثال (٦)** إذا كان س +٢ عاملاً للدالة :
س$^{٣}$ + ب س$^{٢}$ – ٤س + ١٢ ، جد قيمة ب ثم أكمل تحليل الدالة.

الحل :

لتكن د (س) = س$^{٣}$ + ب س$^{٢}$ – ٤س + ١٢
بما أن (س+٢) عامل للدالة
∴ د (–٢) = ٠ حيث –٢ هو العدد الذي يجعل س+٢ =٠
(–٢)$^{٣}$ + ب(–٢)$^{٢}$ – ٤(–٢) +١٢ = ٠
–٨ + ٤ب +٨+١٢ = ٠
ب = –٣
تصبح د (س) = س$^{٣}$ – ٣س$^{٢}$ – ٤س + ١٢ .
نواصل الحل بعد ذلك أما باختيار أعداد أخرى من عوامل ١٢ أو بواسطة القسمة :

س$^{٢}$ – ٥س +٦

س + ٢ ) س$^{٣}$ – ٣س$^{٢}$ – ٤س +١٢
س$^{٣}$ +٢س$^{٢}$

– ٥س$^{٢}$ – ٤س + ١٢
– ٥س$^{٢}$ – ١٠س

٦ س + ١٢
٦ س + ١٢

٠ ٠

$س^{٣} - ٣س^{٢} - ٤س + ١٢ = (س+٢)(س^{٢}-٥س+٦)$

$= (س+٢)(س-٢)(س-٣)$

### (٤-٣) جذور المعادلة من درجة أكبر من ٢

تستخدم نظرية العامل لإيجاد جذور المعادلات من الدرجة الثالثة فما فوق.

> إذا كانت د (س) دالة كثيرة حدود ، يقال أن العدد أ جذراً للمعادلة د (س) =٠ إذا وفقط إذا كان د (أ) = ٠

**مثال** (٧) أثبت أن س=١ جذراً للمعادلة :

$س^{٣} - ٤س^{٢} - ٧س + ١٠ = ٠$ ثم أوجد الجذرين الآخرين.

الحل :

لتكن $د(س) = س^{٣} - ٤س^{٢} - ٧س + ١٠$

$د(١) = ١ - ٤ - ٧ + ١٠ = ٠$

∴ العدد ١ جذر للمعادلة وبالتالي يكون س- ١ عاملا للدالة د (س) .

لإيجاد بقية الجذور نجرّب عوامل العدد ١٠ أو نجري القسمة المطولة .

$س^{٢} - ٣س - ١٠$

$س^{٣} - ٤س^{٢} - ٧س + ١٠$ ÷ $(س - ١)$

$س^{٣} - س^{٢}$

$- ٣س^{٢} - ٧س + ١٠$

$- ٣س^{٢} + ٣س$

$- ١٠س + ١٠$

$- ١٠س + ١٠$

تصبح المعادلة هي $(س-١)(س^{٢} - ٣س - ١٠) = ٠$

(س−١) (س+٢)(س−٥) =٠

∴ الجذران الآخران −٢ ، ٥ .

**مثال** (٨) حل المعادلة ٢س$^{٤}$ +٣س$^{٣}$ −١٨س$^{٢}$ +٨س=٠

الحل :

باستخراج العامل المشترك تصبح المعادلة هي س (٢س$^{٣}$ +٣س$^{٢}$ −١٨س +٨)=٠

ضع د (س) = ٢س$^{٣}$ +٣س$^{٢}$ −١٨س +٨ = ٠

د(١) = ٢+٣−١٨+٨ ≠ ٠

د(−١) = −٢ +٣ + ١٨ + ٨ ≠ ٠

د(٢) = ١٦ + ١٢ −٣٦ + ٨ = ٠

∴ (س−٢) عامل للدالة د (س)

| | |
|---|---|
| | ٢س$^{٢}$+ ٧س−٤ |
| س − ٢ | ٢س$^{٣}$ +٣س$^{٢}$ −١٨س +٨ |
| | ٢س$^{٣}$ −٤س$^{٢}$ |
| | ٧س$^{٢}$ −١٨س+٨ |
| | ٧س$^{٢}$ − ١٤س |
| | −٤س + ٨ |
| | −٤س + ٨ |
| | ٠ ٠ |

تصبح المعادلة على الصورة :

س (س−٢) (٢س$^{٢}$ +٧س−٤) = ٠

س (س−٢) (٢س−١) (س+٤) = ٠

∴ جذور المعادلة هي ٠ ، ٢ ، $\frac{١}{٢}$ ، −٤

**تمرين (٤−١)**

١/ مستخدما القسمة المطولة ، جد خارج القسمة والباقي عند قسمة د (س) على ق (س) في كل مما يأتي :

أ) د (س) = $س^{٣}$ −٧$س^{٢}$ +٦س+٢ ، ق (س) = س+٢

ب) د (س) = $س^{٤}$ +٣$س^{٢}$ − س−٣ ، ق(س) = ٢س+١

ج) د(س) = $س^{٤}$ − ١ ، ق (س) = س−١

٢/ مستخدما نظرية الباقي ، جد الباقي عند قسمة د (س) على ق (س) في كل مما يأتي :

أ. د (س) = $س^{٤}$ − ٦$س^{٣}$ +٥$س^{٢}$ −٢ ، ق (س) = س−٢

ب. د(س) = $س^{٣}$ −٢$س^{٢}$ +٣س −٩ ، ق (س) = س−٤

ج. د(س) = $س^{٣}$ −٣$س^{٢}$− ١ ، ق (س) = ٢س+٣

٣/ أثبت أن ق(س) عامل لكثيرة الحدود د (س) فيما يأتي :

أ/ ق (س) = س +٣ ، د (س) =$س^{٣}$ +٢$س^{٢}$ −٥س−٦

ب/ ق (س) = س−٢ب ، د (س) = $س^{٣}$ − ب $س^{٢}$ − ٥$ب^{٢}$س+٦$ب^{٣}$

٤/ حلل تحليلاً كاملاً :

(أ) $س^{٣}$−٣$س^{٢}$ + ٤

(ب) $ص^{٣}$ +٦$ص^{٢}$ +١١ص +٦

(ج)$س^{٤}$ − $س^{٣}$ + ٤$س^{٢}$ + ٦س

(د) $س^{٤}$ +$س^{٣}$ −٣$س^{٢}$ − ٤س − ٤

(ه) $س^{٣}$ − ٦٤

٥/ جد جذور كل من المعادلات الآتية :

(أ) س$^{٣}$ −٧س +٦ = ٠

(ب) س$^{٣}$ + ٢س$^{٢}$ − ١١س =١٢

(ج) س$^{٣}$ −٣س$^{٢}$ −١٣س+ ١٥ =٠

٦/ إذا كان باقي قسمة س$^{٣}$ − ٣س$^{٢}$ + س + ك على س−٢ يساوي −٧ جد قيمة الثابت ك .

٧/ إذا كان د (س) = س$^{٢}$+ب س + جـ ( ب ، جـ ثابتان) ، جد كل من ب،جـ علماً بأن باقي قسمة د (س) على س− ١ يساوي ٦ وباقي قسمتها على (س+١) يساوي ١٢ .

٨/ إذا كان د (س) = س$^{٦}$ −٥س$^{٤}$ −١٠س$^{٢}$ + د ، جد قيمة د التي تجعل س−١ عاملاً للدالة د (س).

٩/ إذا كان (س +١) و (س−٢) عاملين للدالة :
د (س) = س$^{٤}$ +م س$^{٣}$ + ن س$^{٢}$ −١٦س−١٢ جد قيمة كل من الثابتين م ، ن وعيّن بقية العوامل.

١٠/ إذا كان د (س) = س$^{ن}$ − أ$^{ن}$ حيث ن ∈ ط فأثبت أنه :

أ. عندما يكون ن عدداً زوجياً فإن د(س) تقبل القسمة على كل من (س−أ) و(س+أ) .

ب. عندما يكون ن عدداً فردياً فإن د (س) تقبل القسمة على (س−أ) بينما لا تقبل القسمة على (س+أ) .

**تذكر أن** :

١ /إذا قسمنا دالة كثيرة حدود د(س) على س− أ فإن الباقي = د (أ) . حيث أ هو العدد الذي يجعل (س−أ) = .

٢ /يكون (س−أ) عاملاً للدالة كثيرة الحدود د(س) إذا وفقط إذا كان د (أ) = صفراً .

# الوحدة الخامسة :

# حساب المثلثات

**أهداف الوحدة الخامسة**

بعد نهاية هذه الوحدة يتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن :

١ / يعرّف النسب المثلثية والدوال المثلثية.
٢ / يجد قيم الدول لبعض الزوايا الخاصة .
٣ / يجد النسب المثلثية للزاوية ( − هـ).
٤ / يجد النسب المثلثية لمجموع وفرق زاويتين.
٥ / يجد النسب المثلثية لضعف الزاوية .
٦ / يستنتج النسب المثلثية لثلاث أمثال الزواية .
٧ / يعرّف الزاوية المنتسبة .
٨ / يحول حاصل ضرب جيبين أو جيبي تمام إلى مجموع أو فرق والعكس.
٩ / يحل المتطابقات والمعادلات المثلثية .
١٠ / يميز بين المتطابقات والمعادلات المثلثية .

## الوحدة الخامسة
## حساب المثلثات

### نبذة تاريخية

حساب المثلثات من بين العلوم الرياضية الأولى كان علماً للحساب قائماً على نظريات هندسية . وقد يدعى أن هيباركس الإغريقي هو أول من وضع أصول حساب المثلثات (في القرن الثاني قبل الميلاد) إلا أن عمله فُقد، وكذلك يدعى لأن مينالوس (في القرن الأول قبل الميلاد) عالج حساب المثلثات بواسطة الأوتار.

وقد وضع بطليموس في عمله في الفلك جداول الأوتار ٣٠´ صحيحة لخمس خانات مع توضيح طريقة العمل وحل المثلث الكري ووصل إلى نظريات على الأوتار وبعض القوانين المثلثية . أما الهنود فلم يكن لهم ملحوظ في المثلثات ماعدا عمل جداول للجيب ، ونصف الوتر لضبط القوس على فترات ٣ ٤٥⁄ ° باستخدام جا$^{٢}$ هـ + جتا$^{٢}$ هـ = ١ ، جتا هـ = جا(٩٠ – هـ) .

واستخدمت جداولهم لحل المثلث الكري والمستوي وترجم العرب عملهم في حوالي القرن الثامن.

وإلى العرب يرجع الفضل إلى فصل المثلثات عن الفلك ، وجعله علماً مستقلاً ( حوالي القرن الثالث عشر) . فقد أضاف البنتاني قانون جيب التمام للمثلث الكري المائل وقدم جيب الوتر في عمله في عمل بطليموس وجداوله . واستخدم الظل وظل التمام وعمل جداول بفترات ١٠´ . وقدم أبو الوفاء في نهاية القرن العاشر طريقة أكثر دقة في حساب المثلثات الكرية ، وقدم أيضاً القاطع ، وقاطع التمام ، ودروس العلاقة بين النسب المثلثية الستة . ويعزى إلى البيروني (٩٣٧هـ–١٠٤٨م) في تقديم قانون الجيب للمثلث المستوي ، وإلى ابن يونس في القرن الحادي عشر الميلادي في تقديم قانون :

جتاس جتا ص = $\frac{١}{٢}$ جتا (س+ص) + $\frac{١}{٢}$ جتا (س – ص)

ثم انتقلت الحضارة العربية عن طريق أسبانيا إلى الغرب ويعزى إلى ريجيومانتوس ومن بعده إلى توحيد وتبسيط حساب المثلثات عن طريق التعويض للزاوية بدلا عن القوس .

وقدم فيتا (١٦٣٠م) لأول مرة قانون جيب التمام في الهندسة المستوية وقد حث اختراع نابير للوغريثمات (-١٦١٧م) إلى خلق قوانين تستخدم اللوغريثمات وقد ظهر قانون الظل في عمل فيتا ، وقانون نصف الزاوية في عمل رولتيس (١٥٠٨م ) ،أوجلرد (١٦٥٧ م) ، ديموافر (١٦٦٧م – ١٧٥٤م) أويلر (١٧٠٧م – ١٧٨٣م) قوانينهم التي كانت من أوائل الدراسات التي فتحت الطريق إلى حساب المثلثات التحليلي أما عمل فورير على المتسلسلات فظهر في (١٨٠٧م – ١٨٢٢م).

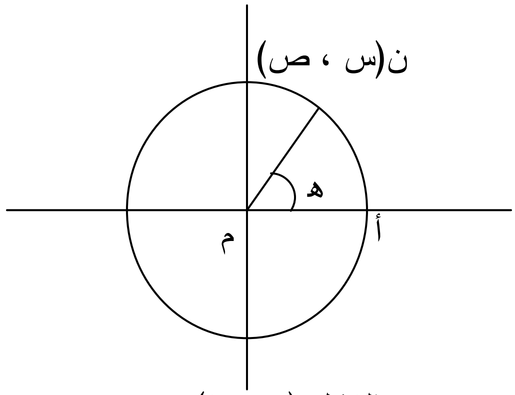
## (٥ – ١) مراجعة عامة :

مر بنا بالصف الأول أنه إذا اخذنا دائرة الوحدة ، وهي الدائرة التي مركزها عند نقطة الأصل ونصف قطرها الوحدة . وكانت ن نقطة على محيط هذه الدائرة احداثياها ( س ، ص ) .

وكان أ م ن = هـ

أنظر الشكل (٥ – ١)

فإن ن تسمى نقطة مثلثية للزاوية هـ . وقد عرفنا أن كل زاوية موجهة رسمت في وضعها القياسى تقابلها نقطة مثلثية على دائرة الوحدة . وأن هناك تقابلاً بين نقاط دائرة الوحدة والزوايا الموجهة في وضعها القياسي . أي أن لكل زاوية موجهة في وضعها القياسي يتعين لها إحداثى سيني واحد وهذا التعيين يعطينا دالة . وكذلك لكل زاوية موجهة في وضعها القياسي يتعين لها احداثي صادي واحد يعطينا دالة أخرى . وقد عرّفنا هاتين الدالتين كما يلي :




الشكل (٥ – ١)

**تعريف :**

> تسمى س ( الاحداثى السيني) للنقطة ن من دائرة الوحدة جيب تمام الزاوية هـ . ونرمز لذلك بالشكل جتا هـ = س . وتسمى ص (الاحداثي الصادي) للنقطة ن من دائرة الوحدة جيب الزاوية هـ . ونرمز لذلك بالشكل جاهـ = ص .

وعرّفنا الدوال المثلثية الأخرى الناتجة عن هاتين الدالتين كما يلي :

ظل الزاوية هـ وتكتب ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$

قاطع تمام الزاوية هـ ويكتب قتا هـ = $\frac{1}{\text{جا هـ}} = \frac{1}{\text{ص}}$

قاطع الزاوية هـ ويكتب قا هـ = $\frac{1}{\text{جتا هـ}} = \frac{1}{\text{س}}$

ظل تمام الزاوية هـ ويكتب ظتا هـ = $\frac{1}{\text{ظا هـ}} = \frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

وتعرفنا كذلك بالصف الأول بعض العلاقات الأساسية التي تربط هذه الدوال مع بعضها مثل :

جتا$^{2}$ هـ + جا$^{2}$ هـ = ١ ، ١ + ظا$^{2}$ هـ = قا$^{2}$ هـ

١ + ظتا$^{2}$ هـ = قتا$^{2}$ هـ

كما وجدنا قيم هذه الدوال لبعض الزوايا الخاصة مثل ٠ ، ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° ، ٩٠ ° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٣٦٠° نلخصها لك في الجدول ( ٥ – ١ ) التالي :

| هـ / الدالة | °٠ | °٣٠ | °٤٥ | °٦٠ | °٩٠ | °١٨٠ | °٢٧٠ | °٣٦٠ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| جا هـ | ٠ | $\frac{١}{٢}$ | $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ | $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | ١ | ٠ | ١− | ٠ |
| جتا هـ | ١ | $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ | $\frac{١}{٢}$ | ٠ | ١− | ٠ | ١ |
| ظا هـ | ٠ | $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ | ١ | $\sqrt{٣}$ | $\infty$ | ٠ | $-\infty$ | ٠ |

جدول (٥ – ١)

أما قيم قا هـ ، قتا هـ ، ظتا هـ فيمكنك التوصل اليها بأخذ مقلوب هذه الدوال لهذه الزوايا .

كثيراً ما يطلق إسم النسب المثلثية لهذه الدوال .

**مثال (١) :**

أثبت أن :

(جا هـ + جتا هـ )$^{٢}$ = ١ + ٢ جا هـ جتا هـ

**الحل :**

الطرف الأيمن = (جا هـ + جتا هـ )$^{٢}$ = جا$^{٢}$ هـ + جتا$^{٢}$ هـ + ٢ جا هـ جتا هـ

= ١ + ٢ جا هـ جتا هـ

= الطرف الأيسر

**مثال (٢) :**

أثبت أن : (ظا هـ + ظتا هـ )$^{٢}$ = قا$^{٢}$ هـ + قتا$^{٢}$ هـ

**الحل :**

الطرف الأيمن = ظا$^{٢}$ هـ + ظتا$^{٢}$ هـ + ٢ ظا هـ ظتا هـ

= ظا$^{٢}$ هـ + ظتا$^{٢}$ هـ + ٢ ظا هـ . $\frac{١}{\text{ظا هـ}}$

= ظا$^{٢}$ هـ + ظتا$^{٢}$ هـ + ٢
= ( قا$^{٢}$هـ − ١) + (قتا$^{٢}$هـ − ١) + ٢
= قا$^{٢}$هـ + قتا$^{٢}$هـ − ٢ + ٢
= قا$^{٢}$ هـ + قتا$^{٢}$ هـ = الطرف الأيسر

**مثال (٣) :**

دون استخدام الجداول احسب جا هـ ، جتا هـ لكل من قيم هـ التالية :

( أ) $\frac{\pi^{s}}{٤}$ (ب) ١٢٠° (جـ ) ٢٢٥° (د ) ٣٣٠°

**الحل :**

(أ ) $\frac{\pi^{s}}{٤} = \frac{١٨٠^\circ}{٤} = ٤٥^\circ$

∴ جا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جتا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

(ب) هـ = ١٢٠° تقع في الربع الثاني .

زاوية الاسناد للزاوية ١٢٠° هي الزاوية ٦٠°

∴ جا ١٢٠° = جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ( الجيب موجب في الربع الثاني ) .

جتا ١٢٠° = − جتا ٦٠° = − $\frac{١}{٢}$ ( جيب التمام في الربع الثاني سالب )

(جـ ) هـ = ٢٢٥°

زاوية الاسناد تساوى ٤٥° وتقع في الربع الثالث

∴ جا ٢٢٥° = − جا ٤٥° = − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

جتا ٢٢٥° = − جتا ٤٥° = − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

(د) هـ = ٣٣٠°

∴ زاوية الإسناد لها تساوى ٣٠° وتقع في الربع الرابع

∴ جا ٣٣٠° = − جا ٣٠° = $-\frac{١}{٢}$

جتا ٣٣٠° = جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

**مثال (٤) :**

دون استخدام الجداول أو الآلات الحاسبة جد قيمة ما يأتي :

جا ٤٥° جتا$^{٢}$ ٣٠° − $\frac{١}{٨}$ ظتا$^{٢}$ ٣٠° قا ٤٥°

**الحل :**

جا ٤٥° جتا$^{٢}$ ٣٠° − $\frac{١}{٨}$ ظتا$^{٢}$ ٣٠° قا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}} \times \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} - \frac{١}{٨}\left(\sqrt{٣}\right)^{٢}\left(\sqrt{٢}\right)$

$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{٣}{٤} - \frac{١}{٨} \times ٣ \times \sqrt{٢}$

$= \frac{٣}{٤\sqrt{٢}} - \frac{٣\sqrt{٢}}{٨} = \frac{٣\sqrt{٢}}{٨} - \frac{٣\sqrt{٢}}{٨} = ٠$

**تمرين (٥ − ١)**

أثبت صحة ما يلي :

(أ) (جا هـ − جتا هـ )$^{٢}$ = ١ − ٢ جا هـ جتا هـ

(ب) قا$^{٢}$ هـ ( ١ + ظا$^{٢}$ هـ ) = قا$^{٤}$ هـ

(جـ) (١ + ظتا$^{٢}$ هـ )$^{٢}$ = $\frac{١}{\text{جا}^{٤}\text{ هـ}}$

(د) $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{قا هـ}} + \frac{\text{جا هـ}}{\text{قتا هـ}} = ١$

(و) (ظا هـ + ١) (ظا هـ − ١) = قا$^{٢}$ هـ − ٢

(٢) جد قيمة كل من :

(أ) ظا $\frac{\pi}{٦}$ (ب) قتا ٦٠° (جـ) ظا ١٨٠°

(د) جا ١٥٠° (هـ) قا $\frac{\pi}{٣}$ (و) ظتا $\frac{٢\pi}{٣}$

(٣) أثبت صحة ما يلي :

(أ) قا$^{٢}$ هـ (١ − جا$^{٢}$ هـ) = ١

(ب) جتا$^{٢}$ هـ (١ + ظا$^{٢}$ هـ) = ١

(جـ) ٢ جتا$^{٢}$ س − جا$^{٢}$ س + ١ = ٣ جتا$^{٢}$ س

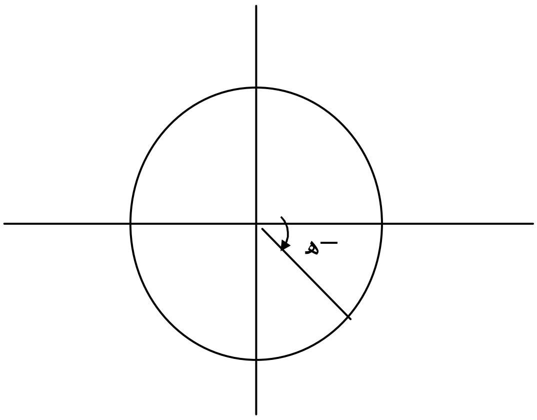
(د) قا$^{٢}$ هـ + قتا$^{٢}$ هـ = قا$^{٢}$ هـ × قتا$^{٢}$ هـ

(هـ) $\frac{\text{قا ص − جتا ص}}{\text{قا ص + جتا ص}} = \frac{\text{ظا}^{٢}\text{ ص}}{\text{١ + قا}^{٢}\text{ ص}}$

(و) $\frac{\text{قاس − قتاس}}{\text{ظاس − ظتاس}} = \frac{\text{ظاس + ظتاس}}{\text{قاس + قتاس}}$

**(٥ – ٢) النسب المثلثية للزاوية ( – هـ ) :**

إذا كانت هـ زاوية حادة فإن الزاوية – هـ تقع في الربع الرابع . ومعلوم أن زاوية الإسناد للزاوية – هـ تساوي هـ . عليه يمكن إيجاد النسب المثلثية للزاوية – هـ ( بدلالة زاوية الاسناد لها )




فيكون : جا ( –هـ ) = – جا هـ

جتا ( – هـ) = جتا هـ

ظا ( – هـ) = – ظا هـ

ويكون النسب المثلثية لمقلوبات هذه النسب كما يلي :

قتا ( –هـ ) = – قتا هـ

قا ( – هـ) = قا هـ

ظتا ( – هـ) = – ظتا هـ

**مثال :**

جد قيمة كل مما يأتي :

جا (–٣٠°) ، قا ( –٦٠°) ، قتا ( – ٤٥°) ، ظتا (–٣٠°)

**الحل :**

جا (–٣٠°) = – جا ٣٠° = $\frac{-١}{٢}$

قا (– ٦٠°) = قا ٦٠° = ٢

قتا ( –٤٥°) = – قتا ٤٥° = – $\sqrt{٢}$

ظتا (–٣٠°) = – ظتا ٣٠° = – $\sqrt{٣}$

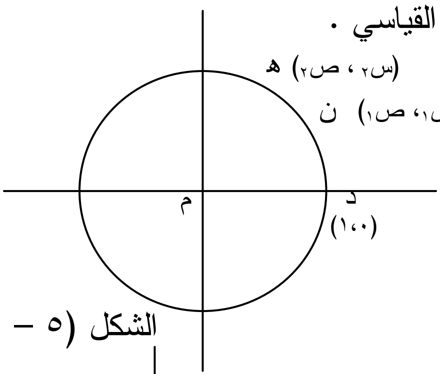
## (٥ – ٣) النسب المثلثية لمجموع وفرق الزاويتين :

إذا كان أ ، ب أى زاويتين ، فسنبحث فيما يلي عن النسب المثلثية لفرق هاتين الزاويتين أ – ب ومجموعهما أ + ب بدلالة النسب المثلثية للزاويتين أ ، ب من خلال دائرة الوحدة والزوايا في الوضع القياسي .

نرسم في الوضع القياسي

د م هـ = أ ، د م ن = ب

فتكون ن م هـ = أ – ب كما في الشكل ( ٥ – ٢) .




الشكل (٥ – ٢)

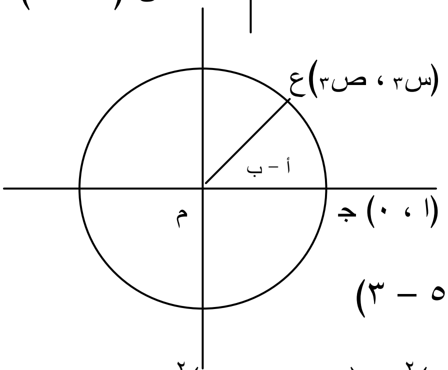
ثم نرسم في الوضع القياسي

جـ م ع ، تساوي ن م هـ

وتساوى أ – ب كما في الشكل (٥ – ٣) . فإذا كان احداثيات النقاط ن ، هـ ، ع كما يلي :

ن $(س_١ ، ص_١)$ ، هـ $(س_٢ ، ص_٢)$

ع $(س_٣ ، ص_٣)$




الشكل (٥ – ٣)

نلاحظ أن طول الوتر جـ ع = طول الوتر ن هـ

أى جـ ع = ن هـ

وبتطبيق قانون المسافة بين نقطتين

$$(س_٣ - ١)^٢ + (ص_٣ - ٠)^٢ = (س_١ - س_٢)^٢ + (ص_١ - ص_٢)^٢$$

$$س_٣^٢ - ٢ س_٣ + ١ + ص_٣^٢ = س_١^٢ - ٢س_١ س_٢ + س_٢^٢ + ص_١^٢ - ٢ص_١ ص_٢ + ص_٢^٢$$

وبما أن الدائرة دائرة وحدة ، فإن $س^٢ + ص^٢ = ١$ لأي نقطة ( س ، ص ) على الدائرة الوحدة ( بتطبيق نظرية فيثاغورث ) وعليه فإن $س_١^٢ + ص_١^٢ = ١$ ، $س_٢^٢ + ص_٢^٢ = ١$ ، $س_٣^٢ + ص_٣^٢ = ١$ ،

$$\therefore ١ + ١ - ٢ س_٣ = ١ - ٢ س_١ س_٢ + ١ - ٢ ص_١ ص_٢$$

$$\therefore - ٢ س_٣ = - ٢ (س_١ س_٢ + ص_١ ص_٢)$$

$$\therefore س_٣ = س_١ س_٢ + ص_١ ص_٢$$

ولكن $س_١$ = جتا ب ، $ص_١$= جا ب ، $س_٢$ = جتا أ ، $ص_٢$= جا أ
$س_٣$ = جتا ( أ – ب )

$$\boxed{\therefore \text{ جتا ( أ – ب ) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب}}$$

ولو عوضنا ( –ب ) بدلاً عن ب في القاعدة السابقة نجد أن : جتا (أ – (– ب))
= جتا أ جتا ( –ب ) + جا أ جا ( – ب) .
لاحظ أن جتا (–ب) = جتا ب ، جا(– ب) = – جا ب .
إذن :

$$\boxed{\text{جتا ( أ + ب ) = جتا أ جتا ب – جا أ جا ب}}$$

واعتماداً على قاعدة جيب تمام الفرق بين الزاويتين إذا وضعنا أ = ٩٠،
ب = هـ نجد أن :

جتا ( ٩٠° – هـ) = جتا ٩٠° جتا هـ + جا ٩٠° جا هـ

وبما أن جتا ٩٠° = ٠ ، جا ٩٠° = ١

∴ جتا ( ٩٠° – هـ ) = ٠ × جتا هـ + ١ × جا هـ

∴ جتا ( ٩٠° – هـ ) = جا هـ

وبما أن الزاويتين ( ٩٠° – هـ ) ، هـ متتامتين
∴ نستنتج أن جيب تمام أى زاوية يساوي جيب الزاوية المتمة لها .
∴ جا ( ٩٠° – هـ ) = جتا هـ .

كذلك في العلاقة : جتا ( ٩٠° – هـ ) = جا هـ
إذا عوضنا (أ + ب )بدلاً عن هـ ينتج :

جتا ( ٩٠° – ( أ + ب ) ) = جا ( أ + ب)

أي : جا ( أ + ب) = جتا ( ( ٩٠° – أ ) – ب)

= جتا ( ٩٠° – أ ) جتا ب + جا ( ٩٠° – أ ) جا ب

= جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

$\boxed{\therefore \text{ جا( أ +ب ) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب}}$

وبوضع ( ـب) بدلاً عن ب نجد أن :

جا( أ ـب ) = جا أ جتا(ـ ب ) + جتا أ جا (ـ ب )

$\boxed{\therefore \text{ جا( أ ـب ) = جا أ جتا ب ـ جتا أ جا ب}}$

**مثال (١) :**

جد قيمة : جتا ١٥° ، جتا ٧٥° ، جا ٧٥° بدون استخدام الجداول

**الحل :**

جتا ١٥° = جتا ( ٦٠° ـ ٤٥°)

= جتا ٦٠° جتا ٤٥° + جا ٦٠° جا٤٥°

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{١ + \sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}}$$

جتا ٧٥° = جتا (٤٥° + ٣٠°) =

جتا ٤٥° جتا ٣٠° ـ جا ٤٥°جا ٣٠°

$$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢} = \frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}}$$

جا ٧٥° = جا (٤٥° + ٣٠° )

= جا ٤٥° جتا ٣٠° + جتا٤٥° جا ٣٠°

$$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢} = \frac{\sqrt{٣} + ١}{٢\sqrt{٢}}$$

لاحظ أن جتا١٥° = جا ٧٥° لأن الزاويتين ١٥° ، ٧٥° متتامتان .

**مثال (٢) :**

اختصر لأبسط صورة :

(أ ) جتا ٣ هـ جتا ٢ هـ – جا ٣ هـ جا ٢ هـ

(ب) جا ٥٥° جتا ٤٠° – جتا ٥٥° جا ٤٠°

**الحل :**

(أ ) جتا ٣ هـ جتا ٢ هـ – جا ٣ هـ جا ٢ هـ = جتا (٣هـ + ٢هـ )

= جتا ٥ هـ

(ب) جا ٥٥° جتا ٤٠° – جتا ٥٥° جا ٤٠° = جا (٥٥° – ٤٠° )

= جا ١٥°

**نتيجة :**

$$\text{ظا (أ + ب )} = \frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ – ظا أ ظاب}}$$

**الاثبات :**

$$\text{ظا (أ + ب )} = \frac{\text{جا ( أ + ب )}}{\text{جتا ( أ + ب )}}$$

$$= \frac{\text{جا أ جتا ب + جتا أ جا ب}}{\text{جتا أ جتا ب – جا أ جا ب}}$$

∴ بقسمة كل من البسط والمقام على جتا أ جتا ب

$$\text{ظا ( أ + ب )} = \frac{\frac{\text{جا أ جتا ب}}{\text{جتا أ جتا ب}} + \frac{\text{جتا أ جا ب}}{\text{جتا أ جتا ب}}}{\frac{\text{جتا أ جتا ب}}{\text{جتا أ جتا ب}} - \frac{\text{جا أ جا ب}}{\text{جتا أ جتا ب}}}$$

$$= \frac{ظا\ أ + ظا\ ب}{١ - ظا\ أ\ ظا\ ب}$$

$$\therefore ظا\ (أ + ب) = \frac{ظا\ أ + ظا\ ب}{١ - ظا\ أ\ ظا\ ب}$$

نلاحظ أنه بتعويض (−ب) بدلاًعن ب تنتج العلاقة

$$ظا\ (أ - ب) = \frac{ظا\ أ - ظا\ ب}{١ + ظا\ أ\ ظا\ ب}$$

**مثال (٥) :**

دون استخدام الجداول جد ظا ٧٥°

**الحل :**

$$ظا\ ٧٥° = ظا\ (٤٥° + ٣٠°) = \frac{ظا\ ٤٥° + ظا\ ٣٠°}{١ - ظا\ ٤٥°\ ظا\ ٣٠°}$$

$$= \frac{١ + \frac{١}{\sqrt{٣}}}{١ - ١ \times \frac{١}{\sqrt{٣}}} = \frac{\sqrt{٣} + ١}{\sqrt{٣} - ١}$$

$$\therefore ظا\ ٧٥° = \frac{\sqrt{٣} + ١}{\sqrt{٣} - ١}$$

**تمرين (٥ – ٢)**

(١) جد قيمة ما يلي من غير أن تستخدم الجداول الرياضية :

( أ ) جتا ٥٠° جتا ١٠° – جا ٥٠° جا ١٠°

(ب) جا ٣٥° جتا ٢٥° + جتا ٣٥° جا ٢٥°

(جـ ) جتا ٧٠° جتا ٢٥° + جا ٧٠° جا ٢٥°

(د ) $\frac{\text{ظا ٣٢° + ظا ٢٨°}}{\text{١ – ظا ٣٢° ظا ٢٨°}}$

(هـ ) $\frac{\text{ظا ٧٨° – ظا ٤٨°}}{\text{١ + ظا ٧٨° ظا ٤٨°}}$

(٢) اختصر :

(أ ) جتا ٢ س جتا س – جا ٢ س جا س

(ب) جا ٢ س جتا س + جتا ٢ س جا س

(جـ ) جا $\frac{١}{٣}$س جتا $\frac{٢}{٣}$س + جا $\frac{٢}{٣}$ س جتا $\frac{١}{٣}$ س

(د ) $\frac{\text{ظا ٣ س – ظا ٢ س}}{\text{١ + ظا ٣ س ظا ٢ س}}$ (هـ ) $\frac{\text{ظا (س+ ص) + ظا (س–ص)}}{\text{١ – ظا (س+ص) ظا (س–ص)}}$

(٣) إذا كان :

جا أ = $\frac{٣}{٥}$، جتا ب = $\frac{٤}{٥}$، أ ، ب يقعان في الربع الأول

جد قيمة ( أ) جا ( أ + ب) (ب) جتا ( أ – ب)

(جـ ) ظا ( أ + ب)

(٤) أثبت أن قا ( أ – ب) = $\frac{\text{قا أ قا ب}}{\text{١ + ظا أ ظا ب}}$

**(٥ –٤) النسب المثلثية لضعف الزاوية ونصفها :**

**(١) جيب الزاوية ٢ أ**

جا ٢ أ = جا ( أ + أ ) = جا أ جتا أ + جتا أ جا أ

$$\boxed{\text{جا ٢ أ} = \text{٢ جا أ جتا أ}}$$

**مثال (١) :**

إذا كان جا أ = $\frac{٣}{٥}$ ، فجد قيمة جا ٢ أ حيث أ تقع في الربع الأول

**الحل :**

تلاحظ أن جتا$^{٢}$ أ = ١ – جا$^{٢}$ أ = ١ – $\frac{٩}{٢٥}$ = $\frac{١٦}{٢٥}$

∴ جتا أ = ± $\frac{٤}{٥}$ ، وبما أن أ تقع في الربع الأول

∴ جتا أ > ٠ أى أن جتا أ = $\frac{٤}{٥}$

∴ جا ٢ أ = ٢ جا أ جتا أ = ٢ × $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{٤}{٥}$ = $\frac{٢٤}{٢٥}$

**(٢) جيب تمام ٢ أ :**

جتا ٢ أ = جتا ( أ + أ ) = جتا أ جتا أ – جا أ جا أ

= جتا$^{٢}$ أ – جا$^{٢}$ أ

إذن $\boxed{\text{جتا ٢ أ} = \text{جتا}^{٢}\text{ أ} - \text{جا}^{٢}\text{ أ}}$

وبما أن جتا$^{٢}$ أ + جا$^{٢}$ أ = ١ فبالامكان كتابة الصيغة الموافقة لـــ جتا ٢ أ بدلالة جا أ فقط أو جتا أ فقط .

جتا ٢ أ = جتا$^{٢}$ أ – ( ١ – جتا$^{٢}$ أ ) = ٢ جتا$^{٢}$ أ – ١

جتا ٢ أ = ( ١ – جا$^{٢}$ أ ) – جا$^{٢}$ أ = ١ – ٢ جا$^{٢}$ أ

∴ جتا٢أ = ٢جتا$^{٢}$ أ – ١

∴ جتا٢أ = ١– ٢جا$^{٢}$ أ

ومن هاتين العلاقتين يمكن ايجاد الصيغة الموافقة بنصف الزاوية . فإذا وضعنا ٢ أ = هـ وجدنا أ = $\frac{هـ}{٢}$

$$\text{جتا هـ} = ٢\,\text{جتا}^٢\,\frac{\text{هـ}}{٢} - ١ = \text{جتا}^٢\,\frac{\text{هـ}}{٢} - \text{جا}^٢\,\frac{\text{هـ}}{٢} = ١ - ٢\,\text{جا}^٢\,\frac{\text{هـ}}{٢}$$

وأيضاً $\text{جا هـ} = ٢\,\text{جا}\,\frac{\text{هـ}}{٢}\,\text{جتا}\,\frac{\text{هـ}}{٢}$

**(٢) ظل الزاوية ٢ أ**

$$\text{ظا ٢ أ} = \text{ظا}\,(\text{أ} + \text{أ}) = \frac{\text{ظا أ} + \text{ظا أ}}{١ - \text{ظا أ ظا أ}} = \frac{٢\,\text{ظا أ}}{١ - \text{ظا}^٢\,\text{أ}}$$

$$\boxed{\therefore\ \text{ظا ٢ أ} = \frac{٢\,\text{ظا أ}}{١ - \text{ظا}^٢\,\text{أ}}}$$

**مثال (٣) :**

إذا كان $\text{ظا أ} = \frac{٣}{٤}$ ، وكان $٠ < \text{أ} < ٤٥°$

جد ظا ٢ أ

**الحل :**

$$\text{ظا ٢ أ} = \frac{٢\,\text{ظا أ}}{١ - \text{ظا}^٢\,\text{أ}} = \frac{٢ \times \frac{٣}{٤}}{١ - \left(\frac{٣}{٤}\right)^٢} = \frac{\frac{٣}{٢}}{١ - \frac{٩}{١٦}} = \frac{\frac{٣}{٢}}{\frac{٧}{١٦}}$$

$$= \frac{٣}{٢} \times \frac{١٦}{٧} = \frac{٢٤}{٧}$$

**مثال (٤) :**

اختصر لابسط صورة :

$$\frac{\text{جا ٢ أ}}{١ + \text{جتا ٢ أ}}$$

**الحل :**

$$\frac{\text{جا ٢ أ}}{١ + \text{جتا ٢ أ}} = \frac{٢\,\text{جا أ جتا أ}}{١ + (٢\,\text{جتا}^٢\,\text{أ} - ١)} = \frac{٢\,\text{جا أ جتا أ}}{١ + ٢\,\text{جتا}^٢\,\text{أ} - ١}$$

$$= \frac{٢\,\text{جا أ جتا أ}}{٢\,\text{جتا}^٢\,\text{أ}} = \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}} = \text{ظا أ}$$

**تمرين (٥ – ٣)**

(١) جد قيمة ما يأتي دون استخدام الجداول

( أ ) ٢ جتا$^{٢}$ ١٥° – ١ (ب) ١ – ٢جا$^{٢}$ ٢٢$\frac{١}{٢}$°

(جـ ) ٢ جا ١٥° جتا ١٥° (د ) $\frac{\text{٢ ظا } ٢٢\frac{١}{٢}°}{\text{١ – ظا}^{٢}\ ٢٢\frac{١}{٢}°}$

(٢) استخدم ٣ هـ = ( ٢ هـ + هـ ) وطبق بعد ذلك صيغتي الجمع وضعف الزاوية لاثبات :

(أ ) جا ٣ هـ = ٣ حا هـ – ٤ جا$^{٣}$ هـ (ب) جتا ٣هـ = ٤جتا$^{٣}$ هـ – ٣ جتا هـ

(ج) ظا ٣هـ = $\frac{\text{٣ ظا هـ – ظا}^{٣}\text{ هـ}}{\text{١ – ٣ ظا}^{٢}\text{ هـ}}$

(٣) استخدم قانون الفرق لايجاد صيغ أبسط لكل من :

(أ ) جا (٩٠° – هـ) (ب) جتا (٩٠° – هـ) (جـ ) جتا (هـ – ١٨٠°)

(د ) جا (هـ – ٢٧٠°) (هـ ) جا (هـ – ٩٠°) .

(٤) إذا كان جا أ = $\frac{٤}{٥}$ ، جتا ب = $\frac{-٣}{٥}$ أحسب

( أ) جا ( أ – ب) (ب) جتا ( أ – ب)

(٥) اختصر :

(أ ) ظا (١٨٠° + هـ) (ب) ظا (١٨٠° – هـ)

(٦) اختصر

(أ) $\frac{\text{جتا ٢س}}{\text{جتاس + جاس}}$

(ب)
$$\text{ظا ٢س} \div \frac{\text{ظاس}}{\text{١+ ظاس}}$$

(ج) ٤ جا$^{٢}$س جتا$^{٢}$ س

(٧) أثبت أن

$$\frac{\text{١ + جا٢س}}{\text{جتا٢س}} = \frac{\text{جتاس + جاس}}{\text{جتاس − جاس}}$$

(٨) اختصر
$$\frac{\text{جتا٣س − جتاس}}{\text{جا٢س .جاس}}$$

أثبت صحة الآتي :

(٩)
$$\frac{\text{١} - \text{ظا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}{\text{١} + \text{ظا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}} = \text{جتا س}$$

(١٠) $\text{ظتا أ} = \frac{\text{جا٢ أ}}{\text{١−جتا ٢أ}}$

(١١) جا٣س جتاس − جتا٣س جاس = جا٢س

(١٢) $\frac{\text{١ +جا٢س}}{\text{جتا٢س}} = \frac{\text{١ +ظاس}}{\text{١− ظاس}}$

(١٣) جا٤س = ٤جاس جتاس جتا٢س

(١٤) $\frac{\text{جا ٢هـ}}{\text{جاهـ}} - \frac{\text{جتا٢هـ}}{\text{جتاهـ}}$ = قاهـ

(١٥) جا (π–هـ ) جا( $\frac{\pi}{2}$ –هـ) = $\frac{1}{2}$جا ٢هـ

(١٦) $\frac{\text{جا٣أ –جتا٣أ}}{\text{جأ +جتاأ}}$ = ٢جا٢أ –١

(١٧) $\frac{\text{جا ٨س}}{\text{جاس}}$ = ٨ جتاس جتا٢س جتا٤س

(١٨) $\frac{\text{١+جاأ + جتاأ}}{\text{١+جاأ –جتا أ}}$ = ظتا $\frac{\text{أ}}{2}$

(١٩) $\frac{\text{جاأ + جا} \frac{\text{أ}}{2}}{\text{١+ جتا أ + جتا} \frac{\text{أ}}{2}}$ = ظا $\frac{\text{أ}}{2}$

(٢٠) $\frac{\text{٣جاس –جا٣س}}{\text{٣جتاس + جتا ٣س}}$ = ظا$^{3}$ س

**(٥ –٥) الزوايا المنتسبة :**

هنالك بعض العلاقات الهامة التي يمكن بواسطتها التعبير عن النسب المثلثية للزوايا (٩٠° × ن ± هـ ) حيث ن عدد صحيح بدلالة النسب المثلثية للزاوية الحادة هـ .

فإذا وضعنا ن = ١ حصلنا على الزاويتين

(٩٠° + هـ ) ، ( ٩٠° – هـ )

وإذا وضعنا ن = ٢ حصلنا على الزاويتين (١٨٠° + هـ) ، (١٨٠° − هـ) .

وإذا وضعنا ن = ٣ حصلنا على الزاويتين (٢٧٠° + هـ) ، (٢٧٠° − هـ) .

وإذا وضعنا ن = ٤ حصلنا على الزاويتين (٣٦٠° + هـ) ، (٣٦٠° − هـ) .

وهكذا ٠٠٠ وتسمى كل من هذه الزوايا منتسبة إلى الزاوية هـ . ويمكن التوصل إلى النسب المثلثية للزوايا المنتسبة للزاوية هـ بدلالة النسب المثلثية للزاوية هـ . وذلك إما باستخدام مفهوم زاوية الإسناد أو باستخدام قوانين النسب المثلثية لمجموع أو فرق الزاويتين .

فإذا أخذنا مثلاً جا (٩٠° − هـ) نجد أن :

جا (٩٠° − هـ) = جا ٩٠° جتا هـ − جتا ٩٠° × جا هـ

= ١ × جتا هـ − ٠ × جا هـ = جتا هـ

أي   جا (٩٠° − هـ) = جتا هـ

وبالمثل   جتا (٩٠° − هـ) = جا هـ

ظا (٩٠° − هـ) = ظتا هـ

وكذلك :  جا (٩٠° + هـ) = جا ٩٠° جتا هـ + جتا ٩٠° جا هـ

= ١ × جتا هـ + ٠ × جا هـ

= جتا هـ

أي جا (٩٠° + هـ)  =  جتا هـ

وبالاسلوب نفسه يمكن التوصل إلى أن :

جتا (٩٠° + هـ) = − جا هـ

ظا (٩٠° + هـ)  = − ظتا هـ

وكذلك :

جا (١٨٠° − هـ) = جا ١٨٠° جتا هـ − جتا ١٨٠°جا هـ

= ٠ × جتاهـ − (−١) جا هـ = جا هـ

∴ جا (١٨٠° − هـ) = جا هـ

جتا (١٨٠° − هـ) = جتا ١٨٠° جتا هـ + جا ١٨٠° جا هـ

= $\overline{1}$ × جتا هـ + ٠ × جا هـ

= − جتا هـ

وأيضاً ظا (١٨٠° − هـ) = $\frac{\text{ظا ١٨٠° − ظا هـ}}{\text{١ + ظا ١٨٠° ظا هـ}}$ = $\frac{\text{٠ − ظا هـ}}{\text{١ + ٠ × ظا هـ}}$ = − ظا هـ

∴ جا (١٨٠° − هـ) = جا هـ

جتا (١٨٠° − هـ) = − جتا هـ

ظا (١٨٠° − هـ) = − ظا هـ

وبتطبيق ما سبق على الزاوية (١٨٠° + هـ) نجد أن :

∴ جا (١٨٠° + هـ) = −جا هـ

جتا (١٨٠° + هـ) = − جتا هـ

ظا (١٨٠° + هـ) = ظا هـ

وكذلك بالنسبة للزاوية (٢٧٠° − هـ) نجد :

جا (٢٧٠° − هـ) = جا ٢٧٠° جتا هـ − جتا ٢٧٠° جا هـ

= −١ × جتا هـ − ٠ × جا هـ = − جتا هـ

وكذلك لبقية النسب نجد أن :

جا (٢٧٠° − هـ) = −جتا هـ

جتا (٢٧٠° − هـ) = − جا هـ

ظا (٢٧٠° − هـ) = ظتا هـ

وبذات الأسلوب تحقق من القوانين التالية :

جا (٢٧٠° + هـ) = −جتا هـ
جتا (٢٧٠° + هـ) = جا هـ
ظا (٢٧٠° + هـ) = − ظتا هـ

وأيضاً :

جا (٣٦٠° − هـ) = −جا هـ
جتا (٣٦٠° − هـ) = جتا هـ
ظا (٣٦٠° − هـ) = − ظا هـ
جا (٣٦٠° + هـ) = جا هـ
جتا (٣٦٠° + هـ) = جتا هـ
ظا (٣٦٠° + هـ) = ظا هـ

تلاحظ أنه عند نسبة الزاوية هـ للزاويتين ١٨٠° ، ٣٦٠° لا تتغير النسبة، فالنسبة التي بالطرف الأيمن للزاوية المنتسبة هي النسبة نفسها في الطرف الأيسر للزاوية هـ . بينما تخضع الإشارة حسب اشارة النسب في الأرباع المختلفة .

أما إذا كانت الزاوية هـ منسوبة إلى ٩٠° أو ٢٧٠° ، فإن النسبة التي بأحد الطرفين تكون هي نسبة التمام للنسبة الأخرى . وتكون الإشارة حسب إشارة النسبة التي بالطرف الأيمن في الربع الذي تقع فيه الزاوية المنتسبة .

**مثال (١) :**

جد قيم ما يأتي مستخدماً الزوايا المنتسبة

(أ) جتا ٣٠٠° (ب) ظا ٣٣٠° (جـ) قتا ٢٢٥°

(د) قا ١٥٠° (هـ) ظتا ٢١٠°

**الحل :**

(أ) جتا ٣٠٠° = جتا (٣٦٠° − ٦٠° ) = جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

أو بطريقة أخرى :

جتا ٣٠٠° = جتا (٢٧٠° + ٣٠° ) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

(ب) ظا ٣٣٠° = ظا ( ٣٦٠° − ٣٠° ) = − ظا ٣٠° = − $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(جـ ) قتا ٢٢٥° = قتا (١٨٠° + ٤٥°) = − قتا ٤٥° = − $\sqrt{٢}$

( د ) قا ١٥٠° = قا (٩٠° + ٦٠°) = − قتا ٦٠° = − $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

(هـ ) ظتا ٢١٠° = ظتا (١٨٠° + ٣٠°) = ظتا ٣٠° = $\sqrt{٣}$

**مثال (٢) :**

أثبت أن : جا ٦٠٠° جتا ٣٣٠° + جتا ١٢٠° جا ١٥٠° = −١

**الحل :**

الطرف الايمن جا ٦٠٠° جتا ٣٣٠° + جتا ١٢٠° جا ١٥٠°

= جا (٦٠٠° − ٣٦٠°) جتا (٣٦٠° − ٣٠°) + جتا (١٨٠° −٦٠°) جا (١٨٠° − ٣٠°)

= جا (٢٤٠°) جتا ٣٠° +(− جتا ٦٠°) جا ٣٠°

= − جا ٦٠° جتا ٣٠° − جتا ٦٠° جا ٣٠°

= − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{-٣}{٤}$ − $\frac{١}{٤}$ = −١

= الطرف الايسر

## تمرين (٥ – ٤)

(١) اختصر ما يأتي لأبسط صورة .

( أ ) جا ٤٨٠° + جتا ١٢٠° – جتا ٢٤٠° جا ١٢٠°

(ب) جا ٧٨٠° جا ١٢٠° + جتا ١٢٠° جا ٣٩٠°

(جـ ) ظا ( ١٨٠° – أ ) + ظا (١٨٠° + أ ) – قا (٩٠° – أ )

( د ) قا (٣٦٠° – أ ) + قتا (٢٧٠° + أ ) – قتا (٩٠° + أ )

(٢) دون استخدام الجداول جد قيمة ما يلي :

(أ ) جا (– ٣٠٠°) (ب) جتا ٣١٥° (جـ) ظتا (–٣٣٠°)

(د ) ظا ٣٠٠° (هـ ) قا (– ٣٠٠°) (و) قتا (–٣١٥°)

(٣) اثبت صحة ما يلي :

(أ ) جا ٤٨٠° جتا ١٢٠° – جتا ٢٤٠° جا ١٢٠° = صفر

(ب) جا ٧٨٠° جا ١٢٠° + جتا ١٢٠° جا ٣٩٠° = $\frac{١}{٢}$

(٤) إذا كان جا هـ = أ فجد قيمة ما يأتي بدلالة أ

(أ ) جتا (٢٧٠° – هـ) ، (ب) جا (–هـ) ، (جـ ) قا (٢٧٠° + هـ )

(٥) إذا كان أ ، ب ، جـ زوايا مثلث فاثبت :

(أ ) جا ( أ + ب ) = جا جـ

(ب) ظا أ + ظا ب + ظا جـ = ظا أ ظا ب ظا جـ

(٦) أثبت أن :

جا (١٨٠° – أ ) ظا ( ٩٠° + أ ) قا (٢٧٠° + أ ) = ظتا (٣٦٠° – أ )

(٧) إذا كان أ + ب + جـ = ٢٧٠°

فأثبت أن :

جتا (جـ + أ) = – جا ب

**(٥ –٦) تحويل حاصل ضرب جيبين أو جيبي تمام إلى مجموع أو فرق :**

يلزم لايجاد هذه العلاقات استذكار القوانين الأربعة التالية التي حصلنا عليها سابقاً .

جا ( أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب (١)

جا ( أ – ب) = جا أ جتا ب – جتا أ جا ب (٢)

جتا ( أ + ب) = جتا أ جتا ب – جا أ جا ب (٣)

جتا ( أ – ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب (٤)

فبجمع (١) ، (٢) ينتج

جا ( أ + ب) + جا ( أ – ب) = ٢ جا أ جتا ب

وبالقسمة على ٢ فإن :

$$\boxed{\text{جا أ جتا ب} = \frac{١}{٢}\left[\text{جا ( أ + ب) + جا ( أ – ب)}\right]}$$

وبطرح (٢) من (١) ينتج

جا ( أ + ب) – جا ( أ – ب) = ٢ جتا أ جا ب

∴ بالقسمة على ٢

$$\boxed{\text{جتا أ جا ب} = \frac{١}{٢}\left[\text{جا ( أ + ب) – جا ( أ – ب)}\right]}$$

وبجمع (٣) ، (٤) ينتج :

جتا ( أ + ب) + جتا ( أ – ب) = ٢ جتا أ جتا ب

∴ بالقسمة على ٢

$$\boxed{\text{جتا أ جتا ب} = \frac{١}{٢}\left[\text{جتا ( أ + ب) + جتا ( أ – ب)}\right]}$$

وبطرح (٤) من (٣) ينتج

جتا ( أ + ب ) – جتا ( أ – ب ) = – ٢ جا أ جا ب

وبالقسمة على $^{-}$٢ فإن :

$$\boxed{\text{جا أ جا ب} = \frac{١}{٢}\left[\text{جتا ( أ − ب)} - \text{جتا ( أ + ب)}\right]}$$

**مثال (١) :**

جد قيمة جا ٧٥° جتا ١٥° دون استخدام الجداول

**الحل :**

$$\text{جا ٧٥° جتا ١٥°} = \frac{١}{٢}\left[\text{جا ( ٧٥° + ١٥°)} + \text{جا ( ٧٥° − ١٥°)}\right]$$

$$= \frac{١}{٢}\text{ جا ٩٠°} + \frac{١}{٢}\text{ جا ٦٠°}$$

$$= \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٤} = \frac{٢ + \sqrt{٣}}{٤}$$

**مثال (٢) :**

اكتب حاصل الضرب مما يأتي على صورة مجموع أو فرق

( أ) جتا٤هـ جا٣هـ (ب) جا٨ جـ جتا جـ

الحل :

$$\text{(أ ) جتا٤هـ جا٣هـ} = \frac{١}{٢}\left[\text{جا ( ٤هـ + ٣هـ)} - \text{جا ( ٤هـ − ٣هـ)}\right]$$

$$= \frac{١}{٢}\text{ ( جا ٧ هـ − جا هـ )}$$

$$\therefore \text{ جتا ٤هـ جا ٣هـ} = \frac{١}{٢}\text{ جا ٧هـ} - \frac{١}{٢}\text{ جا هـ}$$

$$\text{(ب ) جا٨ جـ جتاجـ} = \frac{١}{٢}\left[\text{جا ( ٨ جـ + جـ )} + \text{جا ( ٨ جـ − جـ )}\right]$$

$$= \frac{١}{٢}\text{ جا ٩ جـ} + \frac{١}{٢}\text{ جا ٧ جـ}$$

**مثال (٣) :**

إذا كان جتا ٢ د = هـ فبيّن أن :

جتا ( ١٥° + د ) جتا (١٥ – د ) = $\left( \frac{\sqrt{٣}}{٤} + \frac{\text{هـ}}{٢} \right)$

**الحل :**

جتا ( ١٥° + د ) جتا ( ١٥° – د ) = $\frac{١}{٢}$ [جتا ٣٠° + جتا ٢ د]

= $\frac{١}{٢} \left( \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \text{هـ} \right)$

∴ جتا ( ١٥° + د ) جتا (١٥° – د ) = $\left( \frac{\sqrt{٣}}{٤} + \frac{\text{هـ}}{٢} \right)$

**مثال (٤) :**

حوّل كلاً من مما يأتي إلى مجموع أو فرق جيبي تمام :

(أ ) ٢ جا $\frac{\text{هـ}}{٢}$ جا $\frac{\text{٣هـ}}{٢}$ (ب) ٢ جتا $\frac{\text{٧هـ}}{٤}$ جتا $\frac{\text{هـ}}{٤}$

**الحل :**

٢ جا $\frac{\text{هـ}}{٢}$ جا $\frac{\text{٣هـ}}{٢}$ = جتا ( $\frac{\text{هـ – ٣ هـ}}{٢}$ ) – جتا ( $\frac{\text{هـ + ٣ هـ}}{٢}$ )

= جتا ( – هـ ) – جتا ٢ هـ

= جتا هـ – جتا ٢ هـ ( لأن جتا ( –هـ ) = جتا هـ )

(ب) ٢ جتا $\frac{\text{٧هـ}}{٤}$ جتا $\frac{\text{هـ}}{٤}$ = جتا $\frac{\text{٧هـ + هـ}}{٤}$ + جتا $\frac{\text{٧هـ – هـ}}{٤}$

= جتا ٢هـ + جتا $\frac{\text{٣هـ}}{٢}$

## تمرين (٥ – ٥)

(١) اكتب كلاً مما يأتي على صورة مجموع أو فرق جيبين أو جيبي تمام .

(أ ) ٢ جا ٣٠° جتا ٣٠°　　(ب) ٢ جا ٢٠° جتا ٣٠°

(جـ ) ٢ جتا ٦٠° جا ٨٠°　　(د ) ٢ جتا ٦٠° جتا ٨٠°

(هـ ) ٢ جتا ٥٥° جا ٢٥°　　( و) جا ٢٥° جا ٣٥°

(٢) جد قيمة كل مما يأتى دون استخدام الجداول الرياضية :

(أ ) ٢ جتا ٧٥° جتا ١٥°　　(ب) ٢ جا ٤٥° جا ١٥°

(جـ ) جتا ٧٥° جا ١٥°　　(د ) جا ٧٥° جتا ٤٥°

(٣) اكتب كلاً مما يأتي على صورة مجموع أو فرق جيبين أو جيبي تمام .

(أ ) جا ٧ ب جتا ٣ ب　　(ب) جتا $\frac{٣هـ}{٢}$ جتا $\frac{هـ}{٢}$

(جـ ) جتا (٢ م + هـ) جا (٢ م – هـ)　　(د ) جا ( هـ – د) جا ( هـ + د)

(٤) تحقق من صحة ما يأتي :

(أ ) جا (٣٠° + هـ) جا (٣٠° – هـ) = $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ هـ – $\frac{١}{٤}$

(ب) جتا ( $\frac{جـ + د}{٢}$ ) جتا ( $\frac{جـ – د}{٢}$ ) = $\frac{١}{٢}$ ( جتا جـ + جتا د )

(٥) أثبت أن :

(أ ) ٢ جتا (٤٥° + ٢ هـ) جتا (٤٥° – ٢ هـ) = ١ – ٨ جا$^{٢}$هـ جتا$^{٢}$هـ

(ب) ٤جتا٢ أ جتا٣ أ جا ٥أ = جا٤ أ + جا٦ أ + جا١٠ أ

**(٥ –٧) تحويل مجموع أو فرق جيببين أو جيبي تمام إلى حاصل ضرب :**

تعلمت في الدرس السابق قوانين التحويل من حاصل ضرب إلى مجموع أو فرق جيبين أو جيبي تمام . أما في هذا الدرس فسنوضح الحالة العكسية ، كيفية تحويل كل من :

جا س + جا ص ، جا س – جا ص ، جتا س + جتا ص ، جتا س – جتا ص إلى حاصل ضرب .

فبالرجوع إلى العلاقة :

جا ( أ + ب) + جا ( أ – ب) = ٢ جا أ جتا ب (١)

نضع أ + ب = س ، أ – ب = ص

وعند حل هاتين المعادلتين ينتج أن :

أ = $\frac{\text{س + ص}}{٢}$ ، ب = $\frac{\text{س – ص}}{٢}$

∴ الصورة (١) تصبح :

$$\boxed{\text{جا س + جا ص = ٢ جا } \frac{\text{س + ص}}{٢} \text{ جتا } \frac{\text{س – ص}}{٢}}$$

وبالمثل من العلاقة :

جا ( أ + ب) – جا ( أ – ب) = ٢ جتا أ جا ب (٢)

وبوضع أ + ب = س ، أ – ب = ص

أ = $\frac{\text{س + ص}}{٢}$ ، ب = $\frac{\text{س – ص}}{٢}$

$$\boxed{\text{جا س – جا ص = ٢جتا } \frac{\text{س + ص}}{٢} \text{ جا } \frac{\text{س – ص}}{٢}}$$

وكذلك العلاقة :

جتا ( أ + ب) + جتا ( أ – ب) = ٢ جتا أ جتا ب     (٣)

تصبح :

$$\text{جتا س + جتا ص} = ٢ \text{ جتا } \frac{\text{س + ص}}{٢} \text{ جتا } \frac{\text{س – ص}}{٢}$$

وكذلك من العلاقة :

جتا ( أ + ب) – جتا ( أ – ب) = –٢ جا أ جا ب     (٤)

فإن الصورة (٤) تصبح :

$$\text{جتا س – جتا ص} = -٢ \text{ جا } \frac{\text{س + ص}}{٢} \text{ جا } \frac{\text{س – ص}}{٢}$$

**مثال (١) :**

جد قيمة ما يلي دون استخدام الجداول :

(أ ) جا ١٥° – جا ١٠٥°

(ب) جتا ١٥° – جتا ٧٥°

**الحل :**

(أ ) جا ١٥° – جا ١٠٥° = ٢ جتا $\frac{١٥° + ١٠٥°}{٢}$ جا $\frac{١٥° - ١٠٥°}{٢}$

= ٢ جتا ٦٠° جا ( –٤٥° )

= –٢ جتا ٦٠° جا ٤٥°     ( لأن جا (–هـ) = – جا هـ )

$= -٢ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$

(ب) جتا ١٥° − جتا ٧٥° = −٢ جا $\frac{١٥° + ٧٥°}{٢}$ جا $\frac{١٥° - ٧٥°}{٢}$

= −٢ جا $\frac{٩٠°}{٢}$ جا $(\frac{-٦٠°}{٢})$

= −٢ جا ٤٥° جا (−٣٠°)

= ٢ جا ٤٥° جا ٣٠°

= ٢ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

**مثال (٢) :**

حوّل كلاً مما يأتي إلى حاصل ضرب :

(أ ) جا ٤س + جا ٦س (ب) جا ٧س − جا ٣س

(جـ ) جتا ٣س + جتا ٩س (د ) جتا ١١س − جتا ٧س

**الحل :**

(أ ) جا ٤س + جا ٦س = ٢ جا $\frac{٤س + ٦س}{٢}$ جتا $\frac{٤س - ٦س}{٢}$

= ٢جا ٥ س جتا (− س)

= ٢جا ٥س جتا س (لأن جتا (− س) = جتا س )

(ب) جا ٧س − جا ٣س = ٢ جتا $\frac{٧س + ٣س}{٢}$ جا $\frac{٧س - ٣س}{٢}$

= ٢جتا ٥س جا ٢س

(جـ ) جتا ٣س + جتا ٩س = ٢جتا $\frac{٣س + ٩س}{٢}$ جتا $\frac{٣س - ٩س}{٢}$

= ٢ جتا ٦س جتا (−٣س)

= ٢ جتا ٦س جتا ٣ س

(د ) جتا ١١س − جتا ٧س = −٢ جا $\frac{١١س + ٧س}{٢}$ جا $\frac{١١س - ٧س}{٢}$

= −٢ جا ٩س جا ٢س

## تمرين (٥ – ٦)

(١) اكتب كلاً مما يأتي على صورة حاصل ضرب

(أ) جا ٦٠° + جا ٢٠°　　　(ب) جا ٦٠° – جا٢٠°

(جـ) جتا ٦٠° – جتا ٢٠°　　　(د) جتا ٦٠° + جتا ٢٠°

(هـ) ١/٢ (جا٦° + جا١٢°)　　　(و) ١/٢ (جتا٦° + جتا ١٢°)

(٢) جد قيمة كل مما يأتى دون استخدام الجداول .

(أ) جتا ٧٥° + جتا ١٥°　　　(ب) جا ١٠٥° + جا ١٥°

(جـ) جا ١٥° – جا ٧٥°　　　(د) جتا ١٠٥° – جتا ١٥°

(٣) حول ما يأتي إلى حاصل ضرب

(أ) جا ٣ م + جا م　　　(ب) جتا هـ – جتا ٣ هـ

(جـ) جا ٤س – جا ٢س　　　(د) جتا ٨ ل + جتا ٦ ل

(هـ) جتا (٢م + ٢هـ) – جتا (٢م – ٢هـ)

(و) جا (٩٠° – س) – جا ٣س

(٤) بيّن صحة كل مما يأتي :

(أ) (جا ٨٠° – جا ٢٠°) / (جتا ٨٠° + جتا ٢٠°) = √٣ / ٣

(ب) (جا ٥ س + جا ٣ س) / (جتا ٣ س + جتا ٥ س) = ظا ٤ س

(جـ) (جا ٣هـ – جا هـ) / (جا ٣هـ + جا هـ) = ١ – ١/٢ قا$^{2}$ هـ

**(٥ –٨) المتطابقات المثلثية :**

علمنا أن المعادلة المثلثية ( أو غيرها من المعادلات) هي متساوية تتحقق بمجموعة من القيم للرمز المجهول . أما إذا تحققت المتساوية لكل القيم الممكنة للمجهول فإن المتساوية تسمى حينئذٍ متطابقة .

فمثلاً جا هـ – جتا هـ = ٠ ليست متطابقة مثلثية لأن

جا ٣٠ – جتا ٣٠ $\neq$ ٠ فهى معادلة . لكن ظا$^{٢}$ هـ + ١ = قا$^{٢}$ هـ متطابقة لأنها صائبة لجميع قيم هـ الممكنة . وللبرهنة على صحة متطابقة ما فإن ذلك يتم بإحدى الطرق الآتية :

(أ ) البدء بالطرف الأيمن واثبات أنه يساوي الطرف الأيسر .

(ب) البدء بالطرف الأيسر واثبات أنه يساوي الطرف الأيمن .

(جـ ) البدء بكل طرف على حدة واثبات أن كلاً منهما يساوي الآخر.

والأمثله التالية توضح كيفية البرهنة على بعض المتطابقات المثلثية :

**مثال (١) :**

أثبت صحة المتطابقة :

ظا$^{٢}$ هـ – جا$^{٢}$ هـ = ظا$^{٢}$ هـ . جا$^{٢}$ هـ

الاثبات :

الطرف الأيمن :

$$\text{ظا}^{٢}\text{هـ} - \text{جا}^{٢}\text{هـ} = \frac{\text{جا}^{٢}\text{هـ}}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}} - \text{جا}^{٢}\text{هـ} = \frac{\text{جا}^{٢}\text{هـ} - \text{جا}^{٢}\text{هـ جتا}^{٢}\text{هـ}}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}}$$

$$= \frac{\text{جا}^{٢}\text{هـ} \left(١ - \text{جتا}^{٢}\text{هـ}\right)}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}} = \frac{\text{جا}^{٢}\text{هـ} \cdot \text{جا}^{٢}\text{هـ}}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}} = \frac{\text{جا}^{٢}\text{هـ}}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}} \cdot \text{جا}^{٢}\text{هـ}$$

= ظا$^{٢}$هـ . جا$^{٢}$هـ

= الطرف الأيسر

**مثال (٢) :**

اثبت صحة المتطابقة :

جتا$^{٢}$س ظا$^{٢}$س + ١ = قا$^{٢}$س + جا$^{٢}$س – جا$^{٢}$س قا$^{٢}$س

**الاثبات :**

$$\text{الطرف الأيمن} = \text{جتا}^{٢}\text{س} \times \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} + ١$$

$= \text{جا}^{2}\text{س} + 1$

الطرف الأيسر $= \text{قا}^{2}\text{س} + \text{جا}^{2}\text{س} - \text{جا}^{2}\text{س}\ \text{قا}^{2}\text{س}$

$$= \frac{1}{\text{جتا}^{2}\text{س}} + \text{جا}^{2}\text{س} - \text{جا}^{2}\text{س} \times \frac{1}{\text{جتا}^{2}\text{س}}$$

$$= \frac{1}{\text{جتا}^{2}\text{س}} - \frac{\text{جا}^{2}\text{س}}{\text{جتا}^{2}\text{س}} + \text{جا}^{2}\text{س}$$

$$= \frac{1 - \text{جا}^{2}\text{س}}{\text{جتا}^{2}\text{س}} + \text{جا}^{2}\text{س} = \frac{\text{جتا}^{2}\text{س}}{\text{جتا}^{2}\text{س}} + \text{جا}^{2}\text{س}$$

$= 1 + \text{جا}^{2}\text{س}$

حيث أن الطرف الأيمن والطرف الأيسر اختصرا لنفس المقدار فإن المتطابقة قد اثبتت صحتها .

**مثال (٣) :**

اثبت صحة المتطابقة :

$$\frac{\text{جتا س}}{\text{قا س} + \text{ظا س}} = 1 - \text{جا س}$$

**الحل :**

الطرف الأيمن $= \dfrac{\text{جتا س}}{\dfrac{1}{\text{جتا س}} + \dfrac{\text{جاس}}{\text{جتا س}}} = \dfrac{\text{جتا س}}{\dfrac{1 + \text{جا س}}{\text{جتا س}}} = \dfrac{\text{جتا}^{2}\text{س}}{1 + \text{جا س}}$

$$= \frac{1 - \text{جا}^{2}\text{ س}}{1 + \text{جا س}} = \frac{(1 - \text{جا س})(1 + \text{جا س})}{1 + \text{جا س}}$$

$= 1 - \text{جا س} =$ الطرف الأيسر

**مثال (٤) :**

اثبت صحة المتطابقة :

$$\frac{\text{١ + جا٢س}}{\text{جتا٢س}} = \frac{\text{جتا س + جا س}}{\text{جتا س − جا س}}$$

**الاثبات :**

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{\text{١ + جا٢س}}{\text{جتا٢س}} = \frac{\text{جا}^{٢}\text{ س + جتا}^{٢}\text{ س + ٢ جا س جتا س}}{\text{جتا}^{٢}\text{ س − جا}^{٢}\text{ س}}$$

$$= \frac{\text{( جتا س + جا س )}^{٢}}{\text{( جتا س − جا س ) ( جتا س + جا س )}}$$

$$= \frac{\text{جتا س + جا س}}{\text{جتا س − جا س}}$$

$$= \text{الطرف الأيسر}$$

**مثال (٥) :**

اثبت صحة المتطابقة

$$\frac{\text{٢ جا}^{٢}\text{ هـ − ١}}{\text{جا هـ جتا هـ}} = \text{ظا هـ − ظتا هـ}$$

**الحل :**

$$\text{الطرف الأيسر} = \text{ظا هـ − ظتا هـ} = \frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} - \frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$$

$$= \frac{\text{جا}^{٢}\text{هـ − جتا}^{٢}\text{هـ}}{\text{جا هـ جتا هـ}} = \frac{\text{جا}^{٢}\text{هـ − (١ − جا}^{٢}\text{هـ)}}{\text{جا هـ جتا هـ}}$$

$$= \frac{\text{جا}^{٢}\text{هـ − ١ + جا}^{٢}\text{هـ}}{\text{جا هـ جتا هـ}} = \frac{\text{٢جا}^{٢}\text{هـ − ١}}{\text{جا هـ جتا هـ}} = \text{الطرف الأيمن}$$

**تمرين (٥ – ٧)**

اثبت صحة كل من المتطابقات التالية :

(١) $\frac{\text{جا٢أ}}{\text{١ + جتا ٢أ}}$ = ظا أ

(٢) جا أ + جا٣أ = ٤ جا أ جتا$^{٢}$ أ

(٣) ظا أ + ظتا أ = قا أ قتا أ

(٤) قا$^{٢}$جـ + قتا$^{٢}$جـ = قا$^{٢}$جـ قتا$^{٢}$جـ

(٥) (جا جـ – جتا جـ)$^{٢}$ = ١ – جا ٢جـ

(٦) $\frac{\text{جا جـ} - \text{٢جا}^{٣}\text{جـ}}{\text{٢جتا}^{٣}\text{جـ} - \text{جتا جـ}}$ = ظا جـ

(٧) جتا س – $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س جا س = جتا$^{٣}$ س

**(٥ –٩) المعادلات المثلثية :**

المعادلة المثلثية هي متساوية تشمل على نسب مثلثية لزاوية مجهولة ، وحل المعادلة المثلثية هو ايجاد قيم الزاوية التي تحقق المعادلة . وهذه القيم تؤخذ من مجموعة محددة تسمى مجموعة التعويض .

**مثال (١) :**

حل المعادلة ٢ جتا س – $\sqrt{٣}$ = ٠

حيث ٠ ≤ س ≤ ٣٦٠°

**الحل :**

٢ جتا س – $\sqrt{٣}$ = ٠ ⇐ جتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ س = ٣٠°

ومن دراستنا للزاوية المنتسبة نجد أن :

جتا ( ٣٦٠° – هـ ) = جتا هـ

∴ جتا ( ٣٦٠° − ٣٠ ) = جتا ٣٠°

∴ س = ٣٣٠° تحقق المعادلة ايضاً

∴ س = ٣٠° ، ٣٣٠°

**مثال (٢)**

حل المعادلة جا ٤ س − جتا س = ٠

حيث س زاوية حادة .

**الحل :**

جا ٤ س − جتا س = ٠

∴ جا ٤ س = جتا س

ومنها جا ٤ س = جا ( ٩٠° − س)

∴ ٤ س = ٩٠° −س ⇐ س = ١٨°

**مثال (٣) :**

حل المعادلة : ٢ جتا$^{٢}$ س + ٣ جتا س − ٢ = ٠

٠ ≤ س ≤ ٣٦٠°

**الحل :**

٢ جتا$^{٢}$ س + ٣ جتا س − ٢ = ٠

⇐ (٢ جتا س − ١) (جتا س + ٢) = ٠

∴ ٢ جتا س− ١ = ٠ أو جتا س + ٢ = ٠

أى جتا س = $\frac{١}{٢}$ أو جتا س = ⁻٢

وبما أن−١≤ جتاس ≤ ١ فالحالة جتا س = −٢ مرفوضة .

ويكون جتا س = $\frac{١}{٢}$

∴ س = ٦٠° ، س = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°

∴ س = ٦٠° ، ٣٠٠°

**مثال (٤) :**

حل المعادلة : جا٥هـ − جا ٣هـ + جاهـ = ٠

قاصراً قيم هـ من ٠° إلى ١٨٠°

**الحل :**

باستخدام قاعدة المجموع للجيبين بحيث يؤدي ذلك إلى ايجاد عامل مشترك ، تلاحظ أن :

جا ٥هـ + جا هـ = ٢ جا ٣هـ جتا ٢هـ

∴ ٢ جا ٣هـ جتا ٢هـ − جا٣هـ = ٠

∴ جا٣هـ (٢جتا٢هـ − ١) = ٠

إما جا٣هـ = ٠

∴ ٣هـ = ٠° ، ١٨٠° ، ٣٦٠° ، ٥٤٠° ، . . .

∴ هـ = ٠° ، ٦٠° ، ١٢٠° ، ١٨٠°

أو جتا٢هـ = $\frac{١}{٢}$

∴ ٢ هـ =٦٠° ، ٣٠٠°

∴ هـ = ٣٠° ، ١٥٠°

∴هـ = ٠° ، ٣٠° ، ٦٠° ، ١٢٠° ، ١٥٠ ° ، ١٨٠°

**تمرين ( ٥ − ٨ )**

حل المعادلات المثلثية التالية حيث ٠ ≤ س ≤ ٣٦٠°

(١) ١ − ٢ جا س = ٠

(٢) ٢ جا س = قتا س

(٣) جا$^{٢}$ س = جا س − $\frac{١}{٤}$

(٤) جتا ٨ س – جا ٢ س = ٠

(٥) ٢ جتا س – ظتا س = ٠

(٦) قتا س = ٢ ظتا س

(٧) ظا$^{٢}$ س – ١ = ٠

(٨) ٢ جتا$^{٢}$ س – ٥ جتا س + ٢ = ٠

(٩) جا$^{٢}$ س + ٢ جا س = ٢ – جتا$^{٢}$ س

(١٠) ٣ جا س – ٢ جتا$^{٢}$ س = ٠

(١١) جتا س + جتا ٢ س + جتا ٣ س = ٠

(١٢) جا ٤س – جا ٣ س = جا ٢س

(١٣) جتا ٢س + ٣ جتا س = ١

(١٤) ٢ جا$^{٢}$ س + جتا س = ١

(١٥) ظا$^{٢}$ س – قا س – ١ = ٠

**تمرين عام**

(١) جد قيمة ظا ١٣٥° + جا ١٥٠° قتا ٩٠°

(٢) اثبت صحة المتطابقات :

(أ ) قا$^{٢}$ س + قتا$^{٢}$ س = قا$^{٢}$ س قتا$^{٢}$ س

(ب) $\frac{\text{ظا ٣هـ + ظا هـ}}{\text{ظا ٣هـ – ظا هـ}}$ = ٢ جتا ٢ هـ

(جـ ) $\sqrt{\frac{\text{١ – جتا ٢ س}}{\text{١ + جتا ٢ س}}}$ = ظا س

اختصر : $\frac{\text{جا ١٦٥°}}{\text{جتا ١٠٥°}}$

(٤) برهن أن : $\frac{\text{جا س}}{\text{جا}\frac{\text{س}}{٢}}$ – $\frac{\text{جتا س}}{\text{جتا}\frac{\text{س}}{٢}}$ = قا $\frac{\text{س}}{٢}$

(٥) إذا كان ظا ٤٥° = ١ جد ظا $٢٢\frac{١}{٢}$ ° دون استخدام الآلة الحاسبة .

(٦) إذا علم أن س زاوية حادة ، وأن ظا س = ٢ − $\sqrt{٣}$
احسب ظا ٢ س ، ثم جد قيمة س بالدرجات

(٧) حل المعادلة :
٢ جتا ٢ س = ١ − جتا ٤ س لقيم س بين صفر و ٣٦٠°

(٨) جد قيمة س حيث س زاوية حادة
جا $\frac{س}{٢}$ = جتا س

(٩) جد قيم س في المدى صفر − ٣٦٠° التي تحقق المعادلة
قتا$^{٢}$ س − ٢ = صفر

(١٠) حل المعادلة :
٢جتا$^{٢}$ س − جا س − ١ = ٠
لقيم س في المدى صفر − ٣٦٠°

أ / **تذكر أن** :

١/ جتا$^{٢}$ هـ + جا$^{٢}$ هـ = ١ ، ١ + ظا$^{٢}$ هـ = قا$^{٢}$ هـ

١ + ظتا$^{٢}$ هـ = قتا$^{٢}$ هـ .

٢ / جا ( -هـ ) = - جا هـ ، جتا ( - هـ) = جتا هـ ، ظا ( - هـ) = - ظا هـ

٣ /جتا ( أ - ب ) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب

جتا ( أ + ب ) = جتا أ جتا ب - جا أ جا ب

جا( أ +ب ) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

جا( أ -ب ) = جا أ جتا ب - جتا أ جا ب

ظا ( أ + ب) = ( ظا أ + ظاب) ÷ ( ١ - ظا أ ظاب)

ظا ( أ - ب) = (ظا أ - ظاب ) ÷ ( ١ + ظاأ ظاب)

٤/ جا٢أ = ٢ جاأ جتاأ

جتا ٢أ = جتا $^{٢}$ أ - جا $^{٢}$ أ = ٢ جتا$^{٢}$ أ - ١ = ١ -٢جا$^{٢}$ أ

ظا ٢أ = (٢ظا أ ) ÷ (١- ظا$^{٢}$ أ).

٥ / جا أ جتا ب = $\frac{١}{٢}$ [جا( أ + ب) +جا ( أ - ب) ]

جا أ جا ب = $\frac{١}{٢}$ [جتا ( أ - ب) - جتا ( أ + ب)]

جتا أ جتا ب = $\frac{١}{٢}$ [جتا ( أ + ب) + جتا ( أ - ب)]

جتا أ جا ب = $\frac{١}{٢}$ [جا ( أ + ب) - جا ( أ - ب)]

**ب/ أكمل**

جاس + جاص = ..........................

جاس - جاص = ..........................

جتاس + جتاص = ..........................

جتاس - جتاص = ..........................

# الوحدة السادسة :

# المتتاليات

**أهداف الوحدة السادسة**

بعد نهاية هذه الوحدة يتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن :

١ /يعرّف المتتالية الحسابية والهندسية والهندسية اللانهائية .
٢ /يميّز بين المتتاليات الثلاث .
٣ /يجد الحد العام للمتتالية الحسابية والهندسية .
٤ /يجد مجموع المتتاليات الحسابية والهندسية واللانهائية

# الوحدة السادسة
# المتتالـــيـــات

**(٦ – ١) المتتالية :**

سبق أن تعرفت تطبيقات مجالها مجموعة جزيئة من الأعداد الطبيعية ط = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... } . ومجالها المقابل مجموعة جزئية من الأعداد الطبيعية أو الكلية أو غيرها من المجموعات . والأمثلة الآتية تساعدك على تذكر ما عرفته سابقاً .

**مثال (١) :**

التطبيق الذي قاعدته : ن ← ٢ن +٣ ( حيث ن ∈ ط )
يقرن كل عدد من الاعداد الطبيعية ن بالعدد ٢ن + ٣ هذا التطبيق هو مجموعة الأزواج المرتبة .

{ (١ ، ٥) ، (٢ ، ٧) ، (٣ ، ٩) ، (٤ ، ١١) ، ... }

**مثال (٢) :**

التطبيق الذى قاعدته : ن ← $٢^{ن - ١}$
يقرن كل عدد من الأعداد الطبيعية ن بالعدد $٢^{ن - ١}$ هذا التطبيق هو مجموعة الأزواج المرتبة .

{ (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٨) ، ... }

**مثال (٣) :**

التطبيق الذي قاعدته ن ← $(\frac{-١}{٣})^{ن}$ ومجاله { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } يمثل بالمجموعة

{ ( ١ ، $\frac{-١}{٣}$ ) ، ( ٢ ، $\frac{١}{٩}$ ) ، ( ٣ ، $\frac{-١}{٢٧}$ ) ، ( ٤ ، $\frac{١}{٨١}$ ) }

ويلاحظ في الأمثلة السابقة أن المجال إمّا مجموعة الأعداد الطبيعية أو مجموعة جزئية منها تبدأ بالواحد وأن المجال المقابل إمّا مجموعة جزئية من

الأعداد الطبيعية أو الكلية وقد يكون أي مجموعة أخرى . أي تطبيق تنطبق عليه هذه الشروط يسمى متتالية .

**(٦ – ١) تعريف :**

المتتالية هي تطبيق مجاله مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ أو مجموعة جزئية منها وتبدأ بالواحد ويسمى العنصر الأول منها بالحد الأول .

وبما أن المجال هو دائماً مجموعة جزئية من $\mathbb{N}$، فإننا نهمل ذكر المجال ونعبر عن المتتالية بتعيين المجال المقابل ( مجموعة الصور) . وعلى ذلك يمكن كتابة المتتالية في الأمثلة السابقة كما يلي :

مثال (١) : ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ٠٠٠٠٠

مثال (٢) : ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ٠٠٠٠٠٠

مثال (٣) : $\frac{-١}{٣}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{-١}{٢٧}$ ، $\frac{١}{٨١}$ .

**الحد العام للمتتالية :**

ومن الشروط التي ينبغي مراعاتها في المتتالية أن تكون حدودها مرتبة. ويرمز للحد الأول بالرمز $ح_١$ ، وللثاني $ح_٢$ ، والثالث $ح_٣$ ، ٠٠٠ والحد الذي ترتيبه ن بالرمز $ح_ن$ لتكون المتتالية كما يلي :

$ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، ٠٠٠ ، $ح_ن$

نرمز عادة للقيمة التي ياخذها الحد الذي ترتيبه ن بالرمز $ح_ن$ ، وعليه يرمز للمتتالية ح بالرمز { ( ن ، $ح_ن$) : ن $\in \mathbb{N}$} .
$ح_ن$ يسمى بالحد النوني أو الحد العام للمتتالية .

**مثال (١)**

جد الحد العام في المتتالية

٤، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ... ومن ثم أوجد الحد السابع

الحل:

$ح_١ = ٤$

$ح_٢ = ٤× ٢^{١}$

$ح_٣ = ٤× ٢^{٢}$

$ح_٤ = ٤× ٢^{٣}$

$ح_ن = ٤× ٢^{ن- ١}$

$ح_ن = ٢^{ن+١}$

$ح_٧ = ٢^{٧+١}$

$ح_٧ = ٢^{٨}$

$ح_٧ = ٢٥٦$

التعريف السابق لا يشترط وجود قانون أو علاقة بين حدود المتتالية . فمثلاً لا يوجد قانون لمتتالية الأعداد الأولية : ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣، ...

أو للمتتالية التالية : -٥ ،٣ ، ٨ ، ٤ ، -٢ ، ٥، ...

ومع ذلك سنلتزم في هذا الباب بالمتتاليات التي توجد بين عناصرها علاقة محددة بموجب قانون أو قاعدة ثابتة . وتكتب المتتالية بعدة طرق .

فالمتتالية { ( ن ، ٢ن + ٣ ) : ن ∋ ط} يمكن كتابتها بإحدى الطرق التالية :

(١) ن ← ٢ن + ٣

(٢) (٢ن + ٣)

(٣) $ح_ن$ = ٢ن + ٣

(٤) { ( ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ... ، ( ٢ن + ٣ ) ، ... }

(٥) ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ...

المتتالية م = ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ١٣ ، ... مجالها ط = {١ ، ٢ ، ٣ ، ... }

أما المتتالية ل = ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ١٣ . فمجالها = {١ ،٢ ، ٣ ، ٤، ٥ }

ما عدد عناصر المتتالية م والمتتالية ل ؟

إذا كان عدد عناصر المتتالية محدوداً سميت متتالية منتهية . أما إذا كان عدد عناصرها غير محدود فتسمى متتالية لا نهائية .
فيما يلي أمثلة لمتتاليات لا نهائية كل منها معين بقاعدة اقتران .

| المتتالية | حدود المتتالية |
| --- | --- |
| (١) ن ← ٢ن − ١ | ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ... |
| (٢) ن ← $ن^٢$ − ن | ٠ ، ٢ ، ٦ ، ١٢ ، ... |
| (٣) $\frac{(-١)^{ن}}{ن}$ | −١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{-١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ |
| (٤) $ح_{ن}$ = ٢ن + $(-١)^{ن}$ | ١ ، ٥ ، ٥ ، ٩ ، ٩ ، ... |
| (٥) $ح_{١}$ = ١ ، $ح_{ن+١}$ = $ح_{ن}$ + ن | ١ ، ٢ ، ٤ ، ٧ ، ١١ ، ... |

لاحظ في المثال الأخير أن الحد الأول معطى ويساوي ١ فإن أردنا أن نحصل على الحد الثانى نعوض ن = ١
∴ $ح_{١+١}$ = $ح_{١}$ + ١ أى $ح_{٢}$ = ١ + ١ = ٢ . وبالمثل $ح_{٣}$= ٤ وهكذا وعليه فإن حدود المتتالية هي : ١ ، ٢ ، ٤ ، ٧ ، ١١ ، ....

**تمرين (٦ − ١)**

(١) اكتب الحدود الخمسة الأولى والحد العاشر لكل من المتتاليات الآتية :

(أ ) ن ← ٣ن − ٥

(ب) ن ← ٤$ن^٢$ − ١

(جـ) $ح_{ن} = \frac{(ن+١)}{ن}$

(د ) $ح_{ن} = \frac{(-١)^{ن}}{ن^٢ + ١}$

(هـ ) $ح_{ن}$ = ١ + $(-١)^{ن}$

(و ) $ح_{١}$ = ١ ، $ح_{ن+١}$ = $ح_{ن}$ + $ن^٢$

(٢) جد الحد النوني في المتاليات الآتية ثم حقق اجابتك عن طريق التعويض في الحد العام للمتتالية .

أ) ٥٠ ، ٤٦ ، ٤٢ ، ٣٨ ...

ب) ٤ ،١٢ ، ٣٦ ، ١٠٨ ...

(٣) إذا كان $ح_{ن} = ٤ \, (ن - ٤)$

أ) كم حداً سالباً في هذه المتتالية ؟

ب) ما أصغر حد موجب فيها .

ج) هل العدد ٢٧١ حداً فيها ؟

(٤) اكتب الحدود العشرة الأولى لمتتالية فيبوناشي والتي تبدأ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ٠٠٠ والتي قاعدتها :

$ح_{ن+٢} = ح_{ن} + ح_{ن+١}$

(٥) إذا علمت أن العدد ١٣ ينتمي للمتتالية $ح_{ن} = ن^{٢} - ٣ن - ١٥$ . فما ترتيب هذا الحد في المتتالية ؟ وما قيمة الحد الذي يليه مباشرة ؟

(٦) إذا كان الحد النوني في المتتالية ٢٧ ، ٣٢ ، ٣٧ ، ... يساوي ٣ أمثال الحد النوني في المتتالية ٢ ، ٤ ، ٦ ،... فما قيمة ن .

(٧) إذا الحد العام لمتتالية هو $٣٦ \times \left(\frac{١}{٥}\right)^{ن-٢}$ كم حداً منها أكبر من٢.

**(٦-٢ ) المتتالية الحسابية**

تأمل المتتاليات التالية :

( أ) ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧، ٩ ، ٠٠٠٠

(ب) ١٥ ، ١١ ، ٧ ، ٣ ، -١ ، ٠٠٠

(ج ) -٧، -٢ ، ٣ ، ٨ ، ١٣ ، ٠٠٠

(د ) ٢ ، ١,٥ ، ١ ، ٠,٥ ، ٠ ، ٠٠٠

ما حاصل طرح الحد الأول من الثاني ؟ والحد الثاني من الثالث ؟ والحد الثالث من الرابع ؟ والحد الرابع من الخامس ؟ في كل متتالية . هل تستطيع أن تجد الحد السادس في كل متتالية ؟

مثل هذا النوع من المتتاليات الذي يزيد أو ينقص كل حد فيه عن الحد السابق له بمقدار ثابت يسمى متتالية حسابية .

**(٦- ٢) تعريف**

المتتالية الممثلة بالقاعدة
$ح_١$ = أ ، $ح_{ن+١}$ = $ح_ن$ + د حيث أ ، د ثابتان .
تسمى متتالية حسابية . ويطلق على العدد د أساس المتتالية الحسابية . وعلى هذا فإن المتتالية الحسابية تكتب على الصورة أ ، أ + د ، أ + ٢ د ، ...

**مثال (١) :**

جد أساس كل من المتتاليات التالية د ، وحدها الأول أ .

(أ ) ٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ....

(ب) -٣,٥ ، -٣ ، -٢,٥ ، -٢ ، ...

(جـ ) ٧ ، ٣ ، -١ ، -٥ ، -٩ ...

**الحل :**

( أ) د = ١٠ - ٥ = ١٥ - ١٠ = ٥
∴ أ = ٥

(ب) د = -٣ - (-٣,٥ ) = -٢,٥ - (-٣) = ٠,٥
∴ أ = -٣,٥

(جـ ) د = ٣ - ٧ = -١ - ٣ = -٤
∴ أ = ٧

**مثال (٢) :**

كوّن المتتالية الحسابية التي حدها الأول ١٠ وأساسها ٣

**الحل :**

$ح_١$ = ١٠
$ح_٢$ = ١٠ + ١ × ٣ = ١٣
$ح_٣$ = ١٠ + ٢ × ٣ = ١٦
$ح_٤$ = ١٠ + ٣ × ٣ = ١٩
$ح_٥$ = ١٠ + ٤ × ٣ = ٢٢

∴ المتتالية هى : ١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٩ ، ٢٢ ، ...

**مثال (٣) :**

كوّن المتتالية الحسابية التي حدها الأول −٧ وأساسها−٢.

**الحل :**

ح١ = −٧ + ٠ × (−٢) = −٧
ح٢ = −٧ + ١ × (−٢) = −٩
ح٣ = −٧ + ٢ × (−٢) = −١١
ح٤ = −٧ + ٣ × (−٢) = −١٣
ح٥ = −٧ + ٤ × (−٢) = −١٥

∴ المتتالية هي : −٧ ، −٩ ، −١١ ، −١٣ ، −١٥ ، ...

هل لاحظت العلاقة بين معامل الأساس (−٢) ورتبة الحد في المتتالية

**مثال (٤) :**

كوّن المتتالية الحسابية التي حدها الأول أ وأساسها د ومن ثم جد حدها العام .

**الحل :**

ح١ = أ + ٠ × د
ح٢ = أ + ١ × د
ح٣ = أ + ٢ × د
ح٤ = أ + ٣ × د
∴ح١٠ = أ + ٩ × د
∴ حن = أ + ( ن − ١) د ( الحد النوني أو الحد العام ) .

إذا كان الحد الأول في متتالية حسابية أ وأساسها د فإن حن = أ + ( ن − ١) د ويسمى الحـــد العام (الحد النونى) .حيث ن يمثل رتبة الحد في المتتالية وحن يمثل قيمة الحد الذي ترتيبه ن

**مثال (٥) :**

جد الحد الخامس عشر في المتتالية الحسابية

٤ ، ٩ ، ١٤ ، ١٩ ، ...

**الحل :**

أ= ٤ ، د = ٩ – ٤ = ٥ ، ن = ١٥

∴ $ح_{ن}$ = أ + ( ن – ١ ) د

$ح_{١٥}$ = ٤ + ١٤ × ٥ = ٧٤

**مثال (٦) :**

جد الحد النوني للمتتالية :

١٢ ، ٩ ، ٦ ، ٣ ، ...

**الحل :**

$ح_{١}$ = ١٢ ، د = ٩ – ١٢ = –٣

∴ $ح_{ن}$ = أ + ( ن – ١ ) د

$ح_{ن}$ = ١٢ + ( ن – ١ ) × –٣= ١٢ – ٣ن + ٣

= ١٥ – ٣ن

**مثال (٧) :**

إذا كان الحد الخامس عشر في متتالية حسابية ٤٩ وأساسها ٣ ، فجد الحد الذي ترتيبه ٣٢ والحد الذى ترتيبه ٥٠ .

**الحل :**

$ح_{١٥}$ = أ + ( ١٥ – ١ ) × ٣

٤٩ = أ + ١٤ × ٣ ⇐ أ = ٤٩ – ٤٢ = ٧

∴ $ح_{ن}$ = ٧ + ( ن – ١ ) × ٣ = ٧ + ٣ن – ٣ = ٣ن + ٤

∴ $ح_{٣٢}$ = ٣ × ٣٢ + ٤ = ١٠٠

$ح_{٥٠}$ = ٣ × ٥٠ + ٤ = ١٥٤

### تمرين (٦ – ٢)

(١) جد الحد السابع والعشرين من متتالية حسابية حدها الأول ٥ وحدها الثالث ٨ .

(٢) في متتالية حسابية الحد الرابع ١٨ والحد السابع ١٦ جد الحد الأول والاساس والحد العاشر .

(٣) أدخل ٣ أعداد بين ١٥ ، ٢٧ بحيث تشكل الحدود الخمسة حدوداً في متتالية حسابية .

(٤) أدخل ستة حدود بين ٢ ، ٢٣ بحيث تكون متتالية حسابية .

(٥) إذا كانت س ، ص ، ع تمثل حدوداً متتابعة في متتالية حسابية ، أثبت أن :

$$\text{ص} = \frac{\text{س} + \text{ع}}{٢}$$

(٦) جد رتبة أول حد سالب في المتتالية الحسابية
١٧٠ ، ١٦١ ، ١٥٢ ،...

(٧) أوجد عدد الحدود في المتتاليات العددية الآتية :

أ. ٤ ، ٩، ١٤ ، ... ، ٦٤

ب. ٨ ، ٥ ، ٢ ،... ، –٢٥

ج. ٦ ، ٥,٩ ، ٥,٨ ، ... ، ٣,٥

(٨) إذا كان الحد النوني في المتتالية ٣ ، ٥ ، ٧ ،... يساوي الحد النوني في المتتالية –٥ ،–٢ ، ١ ، ... فما قيمة ن .

(٩) متالية حسابية حدها الرابع يساوي ٥ ومجموع حديها الثالث والثامن =١ أوجد حدها الخامس عشر .

(١٠) متتالية عددية مجموع حديها الثاني والسادس = ٣ ومجموع حديها الخامس والتاسع = ١٨ كون المتتالية .

**(٦ – ٣) مجموع المتتالية الحسابية إلى ن حداً :**

تأمل المثال التالي :

أنتجت مزرعة البان ٥٠ رطلاً في اليوم الأول ، ٥٧ رطلاً في اليوم الثانى و ٦٤ رطلاً في اليوم الثالث . واستمر الانتاج في زيادة بنفس النمط حتى اليوم العشرين .

(أ ) ما انتاج المزرعة في اليوم العشرين ؟

(ب) وما جملة انتاج المزرعة خلال هذه الفترة ؟

**الحل :**

انتاج المزرعة مستمر على نمط واحد

٥٠ ، ٥٧ ، ٦٤ ، ... وهو يمثل متتالية حسابية فيها ح$_١$ = ٥٠ ، د = ٧

(أ ) انتاج المزرعة في اليوم العشرين يعني ايجاد الحد العشرين في المتتالية السابقة

∴ ح$_{٢٠}$= أ + ١٩ د = ٥٠ + ١٩ × ٧ = ١٨٣ رطلاً

(ب) جملة الانتاج يحتاج منا إلى جمع الانتاج اليومى حتى اليوم العشرين .

∴ جملة الانتاج ج$_{٢٠}$ = ٥٠ + ٥٧ + ٦٤ + ... + ١٦٩ + ١٧٦ + ١٨٣

[ ج$_{٢٠}$ تعنى مجموع حدود المتتالية حتى الحد العشرين ]

وقد تكون عملية الجمع بهذه الطريقة صعبة بعض الشيء خاصة إذا كثرت حدود المتتالية وكبرت الأعداد فيها لذلك سنستخدم طريقة مختصرة للجمع .

ج$_{٢٠}$ = ٥٠ + ٥٧ + ٦٤ + ... + ١٦٩ + ١٧٦ + ١٨٣

ج$_{٢٠}$ = ١٨٣ + ١٧٦ + ١٦٩ + ... + ٦٤ + ٥٧ + ٥٠

ماذا فعلنا ؟ أجمع .

٢ج$_{٢٠}$ =(٥٠ + ١٨٣) +(٥٧ + ١٧٦) +(٦٤ + ١٦٩) + .. +(١٨٣ + ٥٠)

٢ج$_{٢٠}$ =٢٣٣ + ٢٣٣ + ٢٣٣ + ... + ٢٣٣

لاحظ أن العدد ٢٣٣ مكرر ٢٠ مرة

ماذا يمثل العدد ٢٠ ؟ وماذا يمثل العدد ٢٣٣ بالنسبة للحدين الأول والاخير ؟

∴ ٢ ج$_{٢٠}$ = ٢٠ × ٢٣٣

∴ ج$_{٢٠}$ = $\frac{٢٠ \times ٢٣٣}{٢}$ = ٢٣٣٠ رطلاً

ويمكن بالطريقة السابقة نفسها أن نستنتج قانوناً لمعرفة مجموع حدود أي متتالة حسابية .

فالمتتالية الحسابية التي حدها الأول أ وعدد حدودها ن وأساسها د وحدها الأخير ل = أ + (ن – ١) د يمكن ايجاد مجموع حدودها $جـ_ن$ كما يلي :

$جـ_ن$ = أ + ( أ + د) + ( أ + ٢د) +٠٠٠+ ( ل – ٢د) +( ل – د) + ل

$جـ_ن$ =ل+ ( ل – د) + ( ل – ٢د) +٠٠٠+ ( أ + ٢د) +( أ+ د) + أ

وبجمع المتتاليتين

٢$جـ_ن$ = (أ + ل) + (أ + ل) +(أ + ل) +٠٠ + (ل + أ) +( ل + أ) +( ل + أ)

عدد الحدود = ن حداً ، لماذا ؟

∴ ٢$جـ_ن$ = ن (أ + ل)

$$\boxed{∴ جـ_ن = \frac{ن}{٢}(أ + ل)}$$

**مثال (١)**

متتالية حسابية حدها الأول = ١ وحدها الأخير = ٢٨ جد مجموع حدود المتتالية إذا كان عدد حدودها = ١٠

**الحل :**

أ= ١ ، ل = ٢٨ ، ن = ١٠

$$∴ جـ_ن = \frac{ن}{٢}(أ + ل) \quad = \quad ∴ جـ_{١٠} = \frac{١٠}{٢}(١ + ٢٨)$$

$$= ٥ \times ٢٩ = ١٤٥$$

هل يمكن ايجاد مجموع حدود المتتالية إذا كان حدها الأخير مجهولاً ؟

نحن نعلم أن ل يمثل الحد الأخير في المتتالية الحسابية (التي عدد حدودها ن )

∴ ل = أ + (ن – ١) د

نعوض ذلك في معادلة مجموع المتتالية

$$∴ جـ_ن = \frac{ن}{٢}(أ + ل) \qquad ∴ جـ_ن = \frac{ن}{٢}\{ أ + أ + ( ن – ١) د \}$$

∴ $ج_ن = \frac{ن}{٢} (٢أ + (ن - ١) د)$

$ج_ن$ = مجموع المتتالية ، أ = حدها الأول
ن = عدد حدودها ، د = أساس المتتالية .

**مثال (٢) :**

جد مجموع أول ٢٠ حداً من حدود المتتالية الحسابية
٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ...

**الحل :**

أ = ٢ ، د = ٣ ، ن = ٢٠ ، م = مجموع العشرين حداً الأولى

$$ج_ن = \frac{ن}{٢} (٢أ + (ن - ١) د)$$

$$ج_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢} (٢ \times ٢ + ١٩ \times ٣)$$

$$= ١٠ \times ٦١ = ٦١٠$$

**مثال (٣) :**

جد مجموع المتتالية الحسابية ١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ... ، ٨٤

**الحل :**

أ = ١٢ ، د = ٣ ، ن = ؟

$ح_ن = أ + (ن - ١) د$

∴ $٨٤ = ١٢ + (ن - ١) \times ٣ = ١٢ + ٣ن - ٣$

∴ $٣ن = ٧٥ \Leftarrow ن = \frac{٧٥}{٣} = ٢٥$

∴ $ج_ن = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن - ١) د] = \frac{٢٥}{٢} [٢ \times ١٢ + ٢٤ \times ٣]$

∴ $ج_{٢٥} = ١٢٠٠$

**مثال (٤) :**

متتالية حسابية حدها التاسع ضعف حدها الرابع وحدها السادس = ٢٨ .
جد مجموع الحدود العشرة الأولى منها .

**الحل :**

$ح_{٩}$ = أ + ( ٩ − ١ ) د = أ + ٨ د

$ح_{٤}$ = أ + ٣ د

$ح_{٩}$ = ٢ $ح_{٤}$ ⇔ أ + ٨ د = ٢ ( أ + ٣ د ) = ٢ أ + ٦ د

∴ أ = ٢ د

$ح_{٦}$ = أ + ٥ د = ٢٨

∴ ٢ د + ٥ د = ٢٨ ⇐ ٧ د = ٢٨

∴ د = ٤

∵ أ = ٢ د = ٨

∴ ن = ١٠

∴ $جـ_{١٠} = \frac{١٠}{٢}$ [٢ × ٨ + ( ١٠ − ١ ) × ٤ ]

= ٥ [ ١٦ + ٣٦ ] = ٢٦٠

**مثال (٥) :**

يوفر رجل مبلغ ٢٠٠ دينار في الشهر الأول ، ٢٥٠ دينار في الشهر الثانى ، ٣٠٠ دينار في الشهر الثالث ، ويستمر في التوفير بهذا المعدل ، فبعد كم شهر يستطيع شراء جهاز راديو قيمته ١٣٥٠٠ دينار ؟

**الحل :**

٢٠٠ ، ٢٥٠ ، ٣٠٠ ، ... تمثل متتالية حسابية

أ = ٢٠٠ ، د = ٥٠ ، ن = ؟ ، $جـ_{ن}$ = ١٣٥٠٠ دينار

$جـ_{ن} = \frac{ن}{٢}$ [٢أ + ( ن − ١ ) د]

١٣٥٠٠ = $\frac{ن}{٢}$ [٤٠٠+ ( ن − ١ ) × ٥٠ ]

$= \frac{ن}{٢} [٤٠٠ + ٥٠ن - ٥٠]$

$= \frac{ن}{٢} [٣٥٠ + ٥٠ن]$

$ن^٢ + ٧ن - ٥٤٠ = ٠$

$(ن - ٢٠)(ن + ٢٧) = ٠$

∴ ن = ٢٠ ( نستبعد القيم السالبة لـــ ن )

يستطيع الرجل شراء جهاز الراديو بعد ٢٠ شهراً

مثال (٦) إذا كان مجموع ن حداً من متتالية يعطى بالعلاقة $جـ_ن = ٣ن^٢ + ن$

$جـ_ن = ٣ن^٢ + ن$

$جـ_١ = ٣ + ١ = ٤$ ∴ $ح_١ = ٤$

$جـ_٢ = ٣ \times ٢^٢ + ٢ = ١٤$ ∴ $ح_٢ = ١٤ - ٤ = ١٠$

$جـ_٣ = ٣ \times ٣^٢ + ٣ = ٣٠$ ∴ $ح_٣ = ٣٠ - ١٤ = ١٦$

∴ المتتالية ٤ ، ١٠ ، ١٦ ...

**تمرين (٦ – ٣)**

(١) متتالية حسابية حدها الأول –٢٠ ومجموع حدودها ٢٥٠ جد حدها الأخير إذا كان عدد حدودها ١٠.

(٢) إذا كان الحد الأخير في متتالية حسابية يساوى $١١ \frac{١}{٢}$ ، وحدها الأول يساوى ٢ ، جد مجموع حدود المتتالية إذا كان عدد حدودها ٢٠ حداً .

(٣) جد الحدود الخمسة الأولى ثم المجموع حتى الحد الثلاثين لكل من المتتاليات التالية :

(أ) أ = ٧ ، د = ٤

(ب) أ = ١١ ، د = –١,٧

(جـ) $ح_ن = ٢ن - ٣$

(د) $ح_ن = ٥ن$

(٤) جد الحد الخمسين من المتتالية الحسابية –١٢ ، –٩ ، –٦ ، ... ثم جد مجموع الخمسين حداً الأولى منها .

(٥) متتالية حسابية ، حدها الأول ٥ ، وحدها العاشر ٣٢ ، ما مجموع الحدود العشرين الأولى منها ؟

(٦) اثبت أن : $\dfrac{١ + ٣ + ٥ + \cdots + ٩٩}{١٠١ + ١٠٣ + ١٠٥ + \cdots + ١٩٩} = \dfrac{١}{٣}$

(٧) إذا كان الحد النوني من متتالية حسابية يساوي ٧ن+٢ جد مجموع ن حداً الأولى منها ، ما قيمة ن عندما يكون المجموع ٤٩٥ .

(٨) في متتالية حسابية مجموع ن حداً يعطى بالعلاقة $جـ_ن = ٢١ن - ن^٢$ جد :
أ/ المتتالية . ب/ حدها العام . ج/ ترتيب أول حد سالب منها .

(٩) متتالية عددية حدها الأول أ وأساسها ٢أ برهن أن مجموعها إلى ٢ن حداً يساوي أربعة أمثال مجموعها إلى ن حداً.

(١٠) خزان ماء سعته ٨٨٠ لتراً يتسرب منه الماء من ثقب فيه فإذا تسرب في اليوم الأول ٦ لترات وفي اليوم الثانى ١٠ لترات وفي اليوم الثالث ١٤ لتراً ، واستمر التسرب في الأيام التالية بالنمط نفسه فبعد كم يوم يصبح الخزان فارغاً ؟

(١١) إذا كان الفرق بين الحدين الخامس والثالث في متوالية حسابية يساوي ٦، وحدها السابع = ٢٣ جد مجموع الخمسة عشر حداً الأولى منها .

(١٢) إذا كان الحد الرابع من متتالية حسابية مساوياً أربعة أمثال الحد الأول منها، وكان حدها الخامس $\dfrac{١٥}{٨}$ ، جد مجموع الحدود الخمسة الأولى منها .

(١٣) رتبت مقاعد مسرح في ٢٠ صفاً بحيث يحتوي الصف الأول على ٢٢ مقعداً ، والصف الثاني على ٢٤ مقعداً والثالث على ٢٦ مقعداً ، .. وهكذا جد عدد مقاعد الصف الأخير ، وجملة المقاعد الموجودة بالمسرح.

(١٤) متتالية حسابية مجموع الحدود الستة الأولى منها يساوي −٤٢ . ومجموع الحدود الست الأخيرة منها يساوي ٣٠ ، فإذا كان عدد حدودها ١٢ ، فجد :
( أ) أساسها (ب) الحد الأول ( ج) الحد الأخير

(١٥) أراد أحد الرياضيين أن يقطع المسافة من الجيلي إلى بورتسودان عن طريق مدنى بدراجة فقطع في اليوم الأول ١٠٠ كيلومتراً وفي اليوم الثاني ١١٠ كيلومتراً وفي اليوم الثالث ١٢٠ كيلومتراً وأستمر هكذا بنفس

المعدل . ففى كم يوم يصل إلى بورتسودان علماً بأن المسافة بين الجيلي وبورتسودان عن طريق مدني تساوي ١٢٦٠ كيلومتراً .

(١٦) إذا كان الثمن الأصلي لجهاز تسجيل ١٨٠٠٠ دينار ، وكان الثمن ينقص كل سنة بمقدار ٧٥٠ ديناراً ، فبعد كم سنة يصبح ثمنه نصف ثمنه الأصلي .

(١٧) مسألة للنقاش :

عدد سكان منطقة ما بولاية شمال دارفور ٨٢,٥٠٠ نسمة هاجر منهم ١٢٥٠ شخصاً إلى مدينة الابيض عام ١٩٩٠ و ٢٥٠٠ عام ١٩٩١م ، و٣٧٥٠ منهم عام ١٩٩٢م واستمرت الهجرة على هذا المنوال .

فمتى تكون هذه المنطقة مهجورة من السكان ؟

هل تعرف سبب هجرة السكان من القرى إلى المدن ؟

هل من سبيل إلى وقف هذه الهجرة ؟

**(٦ – ٤) المتتالية الهندسية :**

تأمل المتتاليات الآتية :

( أ) ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦، ٣٢ ، ...

(ب) ٥ ، ١٥ ، ٤٥ ، ١٣٥ ، ...

(جـ ) ٩ ، ٣ ، ١ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، ...

(د ) ١٦ ، –٨ ، ٤ ، –٢ ، ١ ، ...

هل هذه المتتاليات حسابية ؟ لماذا ؟

جد النسبة بين الحدين الثاني والأول ، ثم بين الحدين الثالث والثاني ، ثم الرابع والثالث ، ثم الخامس والرابع في كل متتالية على حدة . ماذا تلاحظ ؟

المتتالية التى تكون فيها النسبة بين كل حد والحد السابق له مباشرة نسبة ثابتة تسمى متتالية هندسية ، وتسمى النسبة الثابتة أساس المتتالية الهندسية .

**(٦ – ٣) تعريف :**

المتتالية المعطاة بالقاعدة : $ح_١$ = أ
$ح_{ن+١}$ = $ح_ن$ ر حيث أن أ ، ر
ثابتان . تسمى متتالية هندسية ويطلق
على العدد ر أساس المتتالية .
أ ≠ صفر ، ر ≠ صفر

وعلى هذا فإن المتتالية الهندسية تكتب على الصورة
أ ، أ ر ، أ $ر^٢$ ، أ $ر^٣$ ، أ $ر^٤$ ، ...

**أمثلة على المتتاليات الهندسية :**

(١) ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، .. أ = ١ ، ر = ٢
(٢) ١ ، –١ ، ١ ، –١ ، .... أ = ١ ، ر = –١
(٣) ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ ، .. أ = ١ ، ر = $\frac{١}{٢}$

**مثال (١) :**

كوّن المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٥ وأساسها ٢

**الحل :**

$ح_١$ = ٥ × $٢^٠$ = ٥
$ح_٢$ = ٥ × $٢^١$ = ١٠
$ح_٣$ = ٥ × $٢^٢$ = ٢٠
$ح_٤$ = ٥ × $٢^٣$ = ٤٠
⋮
$ح_{١٠}$ = ٥ × $٢^٩$ = ١٠٦٠

$ح_ن$ = ٥ × $٢^{ن-١}$

∴ المتتالية هى : ٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ٤٠ ، ...

ما العلاقة بين رتبة الحد (ن) والقوة المرفوع لها أساس المتتالية ؟

**مثال (٢) :**

كوّن المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٨١ وأساسها $\frac{١}{٣}$

**الحل :**

$ح_١ = ٨١ \times (\frac{١}{٣})^{٠} = ٨١$

$ح_٢ = ٨١ \times (\frac{١}{٣})^{١} = ٢٧$

$ح_٣ = ٨١ \times (\frac{١}{٣})^{٢} = ٩$

$ح_٤ = ٨١ \times (\frac{١}{٣})^{٣} = ٣$

$\vdots$

$ح_{١٠} = ٨١ \times (\frac{١}{٣})^{٩} = \frac{١}{٢٤٣}$

$\vdots$

$ح_ن = ٨١ \times (\frac{١}{٣})^{ن-١}$

∴ المتتالية هي : ٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ٣ ، .. ، ... ، $٨١ \times (\frac{١}{٣})^{ن-١}$ ، ...

$ح_ن$ يمثل الحد العام للمتتالية .

| |
|---|
| الحد العام للمـــتتالية الهنـــدسية يمثل بالقانون : $ح_ن = أ ر^{ن-١}$ ،ن رتبة الحد ، أ الحد الأول ، ر الأساس. |

**مثال (٣) :**

جد الحد الثامن من المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٨١ وأساسها $\frac{-١}{٣}$

**الحل :**

$ح_٨ = أ ر^{٧}$

$= ٨١ \times (\frac{-١}{٣})^{٧} = -(٣^{٤} \times \frac{١}{٣^{٧}}) = -(\frac{١}{٣^{٣}}) = \frac{-١}{٢٧}$

**مثال (٤) :**

جد المتتالية الهندسية التى حدها الثالث ٢ وحدها السادس $\frac{١}{٤}$

**الحل :**

$ح_٣ = أ ر^٢ = ٢ \quad \cdots \quad (١)$

$ح_٦ = أ ر^٥ = \frac{١}{٤} \quad \cdots \quad (٢)$

بقسمة (٢) ÷ (١) نحصل على :

$$\frac{أ ر^٥}{أ ر^٤} = \frac{١}{٤} \div ٢$$

$\therefore \; ر^٣ = \frac{١}{٨} = (\frac{١}{٢})^٣ \Leftarrow ر = \frac{١}{٢}$

$\therefore$ بالتعويض في (١) : $أ \times (\frac{١}{٢})^٢ = ٢$ ومنها أ = ٨

$\therefore$ المتتالية هى : ٨ ، ٤ ، ٢ ، ١ ، ...

**مثال (٥) :**

متتالية هندسية حدها الأول ٦٢٥ ، وحدها الأخير ١ ، وأساسها $\frac{١}{٥}$ ،

فما عدد حدودها ؟

**الحل :**

$ح_ن = أ ر^{ن - ١}$

$\therefore ١ = ٦٢٥ \times (\frac{١}{٥})^{ن - ١}$

$\therefore \frac{١}{٦٢٥} = (\frac{١}{٥})^{ن - ١} \Leftrightarrow (\frac{١}{٥})^٤ = (\frac{١}{٥})^{ن - ١}$

$\therefore ن - ١ = ٤ \Leftarrow ن = ٥$

$\therefore$ عدد حدود المتتالية = ٥ حدود

**مثال (٦)** جد رتبة الحد الذي قيمته $\frac{١}{٨١}$ من المتتالية الهندسية ٢٧، ٩، ٣ ...

الحل :

أ= ٢٧ ، ر= $\frac{١}{٣}$ ، ح$_{ن}$ = $\frac{١}{٨١}$

ح$_{ن}$ = أ ر$^{ن-١}$

$$\therefore \frac{١}{٨١} = ٢٧ \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{ن-١}$$

$$\frac{١}{٨١ \times ٢٧} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{ن-١}$$

$$\left(\frac{١}{٣}\right)^{٧} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{ن-١}$$

∴ ن − ١ = ٧

∴ ن = ٨

∴ الحد الذي رتبته $\frac{١}{٨١}$ هو ح$_{٨}$

**تمرين (٦ − ٤)**

(١) اكتب الحد العام للمتتاليات الهندسية التالية

(أ ) ٨ ، ٤ ، ٢ ، ...

(ب) ٣ ، ٦ك ، ١٢ك$^{٢}$ ، ...

(جـ ) (س − ١) ، (س − ١)$^{٢}$ ، (س − ١)$^{٣}$ ، ...

(٢) إذا كانت الأعداد ١، $\frac{١}{٣}$، $\frac{١}{٩}$، ... حدوداً في متتالية هندسية ، فجد أساسها .

(٣) متتالية هندسية حدها الثالث ١٨ ، وحدها الخامس ١٦٢ ، فما أساسها ؟ وما حدها الأول ؟

(٤) إذا كان الحد الثاني من متتالية هندسية يساوى ٣ والحد الخامس $\frac{٨١}{٨}$ ، جد الحد السابع .

(٥) إذا كانت ٨١ ، س ، ص ، ٣متتالية هندسية جد قيمة كل من س ، ص.

(٦)جد رتبة الحد الذي قيمته $\frac{١}{٢٧}$ من المتتالية الهندسية ٣ ، $\sqrt{٣}$ ، ١, ...

(٧)جد عدد حدود المتتالية ٣ ، ٦، ١٢ ... ، ٣٨٤

(٨) ادخل ٤ أعداد بين ١٢٨ ، ٤ لتكون متتالية هندسية .

(٩) مجموع الحدين ، الأول والثانى من متتالية هندسية = −٣٢ . ومجموع حديها الرابع والخامس = −٤ جد حدها السابع .

(١٠) متتالية حسابية حدها الأول ٣ ، وحدودها الأول والخامس والثالث عشر تشكل متتالية هندسية فما أساس المتتالية الحسابية .

(١١) بلغ متوسط أقصى درجة حرارة في مدينة حلفا في يونيو ١٩٩٩، ٤٠° وفي يوليو ٣٢° ، وفي أغسطس ٢٥,٦° . واستمرت درجة الحرارة في النقصان بالمعدل نفسه في الشهور التالية . فكم يكون متوسط درجة حرارة حلفا في فبراير ٢٠٠٠م .

( $(٠,٨)^{٨} \simeq ٠,١٦٨$ )

**(٦ – ٥) مجموع المتتالية الهندسية إلى ن من الحدود :**

المتتالية الهندسية أ ، أ ر ، أ $ر^{٢}$ ، ... أ $ر^{ن-١}$ حدها الأول أ ، وأساسها ر وعدد حدودها يساوي ن حداً أفرض أن $جـ_{ن}$ هو مجموع حدود المتتالية

∴ $جـ_{ن}$ = أ + أ ر + أ $ر^{٢}$ + أ $ر^{٣}$ ...+ أ $ر^{ن-٢}$ + أ $ر^{ن-١}$ (١)

أضرب المعادلة (١) في ر ( أساس المتتالية ) .

ر $جـ_{ن}$ = أ ر + أ $ر^{٢}$ + أ $ر^{٣}$ + أ $ر^{٤}$ ...+ أ $ر^{ن-١}$ + أ $ر^{ن}$ (٢)

أطرح (١) من (٢)

ر $جـ_{ن}$ −ر = (أ ر + أ $ر^{٢}$ + أ $ر^{٣}$ +... أ $ر^{ن}$) − ( أ + أ ر + أ $ر^{٢}$ + ...+ أ $ر^{ن-١}$ )

∴ $جـ_{ن}$ ( ر − ١) = أ $ر^{ن}$ − أ

$$\therefore \text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١} \qquad (٣)$$
$\text{ر} \neq ١$

$$\therefore \text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{\text{ن}})}{١ - \text{ر}} \qquad (٤)$$
$\text{ر} \neq ١$

ما الفرق بين المعادلة (٣) ، (٤) ؟
استخدم المعادلة (٣) عندما تكون ر > ١
استخدم المعادلة (٤) عندما تكون ر < ١

إذا كانت ر = ١ فهذا يعنى أن حدود المتتالية كلها متساوية .
$\therefore$ جـ$_{\text{ن}}$ = أ ن
إذا كان الحد الأخير = ل فإن مجموع ن حداً من المتتالية الهندسية

$$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ل ر} - \text{أ}}{\text{ر} - ١} \qquad \text{ر} \neq ١$$

**مثال (١) :**
جد مجموع الحدود الثمانية الأولى للمتتالية الهندسية ١ ، ٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ...

**الحل :**
أ = ١ ، ر = ٣ ، ن = ٨

$$\text{جـ}_{٨} = \frac{١(\text{ر}^{٨} - ١)}{\text{ر} - ١} = \frac{١(٣^{٨} - ١)}{٣ - ١} = \frac{٦٥٦١ - ١}{٢}$$

$$\therefore \text{جـ}_{٨} = \frac{٦٥٦٠}{٢} = ٣٢٨٠$$

**مثال (٢)** متتالية هندسية حدها الأول ١٥ وحدها الأخير ٢٤٠ وأساسها ٢ جد مجموعها .

الحل :

أ = ١٥ ل =٢٤٠ ، ر= ٢

$$\therefore \text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ل ر} - \text{أ}}{\text{ر} - ١} = \frac{٢٤٠ \times ٢ - ١٥}{٢ - ١} = ٤٦٥$$

**مثال (٣)** إذا كان مجموع ن من حدود متتالية هندسية $= ٣^{\text{ن}} - ١$ فأوجد المتتالية وأوجد حدها العام

$\text{جـ}_{\text{ن}} = ٣^{\text{ن}} - ١$

$\text{جـ}_١ = ٣^١ - ١ = ٢$ $\therefore \text{ح}_١ = ٢$

$\text{جـ}_٢ = ٣^٢ - ١ = ٩ - ١ = ٨$ $\therefore \text{ح}_٢ = ٨ - ٢ = ٦$

$\text{جـ}_٣ = ٣^٣ - ١ = ٢٧ - ١ = ٢٦$ $\therefore \text{ح}_٣ = ٢٦ - ٨ = ١٨$

$\therefore$ المتتالية هي ٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...

$\text{ح}_{\text{ن}} = \text{أ ر}^{\text{ن} - ١} = ٢ \times ٣^{\text{ن} - ١}$

**مثال (٤) :**

في متتالية هندسية مجموع الحدين الأول والثالث يساوى ٩٠ ومجموع الحدين الثانى والرابع يساوي ٣٠ جد مجموع الحدود الثمانية الأولى في المتتالية

**الحل :**

$\text{أ} + \text{أ ر}^٢ = ٩٠$ ........ (١)

$\text{أ ر} + \text{أ ر}^٣ = ٣٠$

$\text{ر} (\text{أ} + \text{أ ر}^٢) = ٣٠$ ......... (٢)

عوض (١) في (٢) : $\text{ر} \times ٩٠ = ٣٠$

$$\therefore \text{ر} = \frac{٣٠}{٩٠} = \frac{١}{٣}$$

عوض ر في (١)

$$\text{أ} \left( ١ + \left(\frac{١}{٣}\right)^٢ \right) = ٩٠$$

$$\text{أ} \times \frac{١٠}{٩} = ٩٠ \Leftarrow \text{أ} = ٨١$$

$$\text{جـ}_٨ = \frac{\text{أ}\,(١ - \text{ر}^٨)}{١ - \text{ر}} = \frac{٨١\,(١ - (\frac{١}{٣})^٨)}{١ - \frac{١}{٣}}$$

$$= ٨١\,(١ - \frac{١}{٦٥٦١}) \div \frac{٢}{٣}$$

$$\therefore \text{جـ}_٨ = ٨١ \times \frac{٦٥٦٠}{٦٥٦١} \times \frac{٣}{٢} = ١٢١\,\frac{١٣}{٢٧}$$

**مثال (٥) :**

أراد طارق أن يشتري سيارة بمبلغ ٩٨٤٠٠٠ دينار . فإذا ادخر في الشهر الأول ٣٠٠ دينار وفي الشهر الثاني ٩٠٠ دينار وفي الشهر الثالث ٢٧٠٠ دينار وأخذ يوفر في كل شهر ثلاثة أضعاف ما يوفره في الشهر السابق فبعد كم شهر يستطيع شراء السيارة ؟

**الحل :**

المبالغ التي يوفرها كل شهر على التوالي = ٣٠٠ ، ٩٠٠ ، ٢٧٠٠ ، ... تمثل متتالية هندسية .

أ = ٣٠٠ ، ر = ٣

فإذا كانت $\text{جـ}_{\text{ن}}$ = ٩٨٤٠٠٠ ، ن = عدد الشهور

$$\text{فإن جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ}\,(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١}$$

$$\therefore ٩٨٤٠٠٠ = \frac{٣٠٠(٣^{\text{ن}} - ١)}{٣ - ١}$$

$$٣٢٨٠ = \frac{(٣^{\text{ن}} - ١)}{٢}$$

$$٦٥٦٠ = ٣^{\text{ن}} - ١$$

$\therefore$ $3^{ن} = 6561 = 3^{8}$

$\therefore$ ن = ٨

$\therefore$ يستطيع طارق شراء السيارة بعد ٨ شهور

**تمرين (٦ – ٥)**

(١) جد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الهندسية
١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ...

(٢) جد مجموع الحدود الثمانية الأولى في المتتالية الهندسية
٢٥٦ ، ١٢٨ ، ٦٤ ، ٣٢ ، ...

(٣) جد مجموع المتتالية الهندسية ١ ، س ، $س^{2}$ ، $س^{3}$ ، .... إلى ن من الحدود .

(٤) كم حداً يلزم اخذه من المتتالية الهندسية ٤ ، –١٢ ، ٣٦ ، ... ليكون المجموع ٢١٨٨ ؟

(٥) إذا كان مجموع الحدين الأول والثانى في متوالية هندسية يساوي ١٦ . ومجموع الأربعة حدود الأولى منها يساوي ٢٠ جد مجموع العشرة حدود الأولى منها .

(٦) أراد عصام أن يدخر مبلغاً من المال لشراء ثلاجة فإذا أدخر في الشهر الأول ١٠ دنانير وفي الشهر الثانى ٢٠ ديناراً وفي الشهر الثالث ٤٠ ديناراً، وأخذ يوفر في كل شهر ضعف ما يدخر في الشهر السابق .
( أ) جد المبلغ الذي يوفره في الشهر العاشر .
(ب) مجموع ما ادخره حتى الشهر العاشر .

(٧) اوجد مجموع أول ثمان حدود من المتتالية الهندسية التي حدها العام يساوي $3(-2)^{ن-1}$ .

(٨) إذا كان مجموع ن حداً من متتالية هندسية يتعين من القانون $حـ_{ن} = 128 - 2^{7-ن}$ جد المتتالية وحدها الثامن.

(٩) خزان ماء فارغ صب فيه ٢٥٠ متراً مكعباً من الماء في اليوم الأول ، ثم صب فيه كل يوم يليه $\frac{4}{5}$ كمية الماء التى صبت في اليوم السابق له . فإذا امتلأ الخزان بعد ٥ أيام . فما الحجم الداخلى للخزان .

(١٠) تتكاثر جرثومة بكتيرية كل نصف ساعة إلى اثنين فما عدد الجراثيم التي تنتج عن جرثومة واحدة بعد ١٠ ساعات ؟

(١١) يرتفع منطاد مملؤ بالهواء الساخن إلى أعلى . وكان ارتفاعه بعد اطلاقه بدقيقة واحدة يساوي ٨٠ قدماً ثم صار يرتفع كل دقيقة بمعدل ٦٠٪ من الارتفاع الذى ارتفعه في الدقيقة السابقة لها . جد :

( أ ) ارتفاع المنطاد عن سطح الأرض بعد ٦ دقائق .

(ب) بعد كم دقيقة يكون ارتفاع المنطاد عن سطح الأرض مساوياً ١٧٤,٠٨ قدماً .

(١٢) الجدول التالي يوضح عدد سكان دولة أوربية في كل ٥ سنوات ومتوسط دخل الفرد الواحد بالدولار في السنة

| السنة | ١٩٨٥ | ١٩٩٠ | ١٩٩٥ | ٢٠٠٠ | ٢٠٠٥ |
|---|---|---|---|---|---|
| عدد السكان بالمليون | ٦٠ | ٦٦ | ٧٢,٦ | | |
| متوسط دخل الفرد | ٣٠,٠٠٠ | ٣٠,٣٠٠ | ٣٠,٦٠٠ | | |

فإذا كانت الزيادة تسير وفق نمط ثابت . فكم يكون عدد سكان هذه الدولة ومتوسط دخل الفرد الواحد عام ٢٠١٥ ؟

مسألة للنقاش :

(١٣) افترض مالتس أن الطعام في العالم يتزايد على أساس متتالية حسابية ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ... بينما السكان يتزايدون على أساس متتالية هندسية ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ... لذلك يقترح الحد من التزايد السكاني . لماذا اقترح مالتس هذا الاقتراح ؟ وهل توافقه على ذلك ؟

وهل يستطيع الإنسان أن يوفق بين نقص الغذاء وتزايد السكان ؟

وهل هناك تعارض بين نظرية مالتس وقوله تعالى : " وفي السماء رزقكم وما توعدون ، فورب السماء والأرض أنه لحق مثلما أنكم تنطقون " .

## (٦ – ٦) مجموع المتتالية الهندسية اللانهائية :

تأمل المتتاليات الهندسية التالية :

(١) ٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ ، ٩٦ .

(٢) ٣ ، ٦ ، ١٢ ، ... ، ٣ $(٢)^{ن - ١}$

(٣) ٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...

المتتالية الأولى عدد حدودها =٦ حدود ( متتالية منتهية )
المتتالية الثانية عدد حدودها =ن حداً ( متتالية منتهية )
المتتالية الثالثة عدد حدودها = $\infty$ حدود ( متتالية لانهائية)
المتتالية الهندسية اللانهائية هي المتتالية التي عدد حدودها ما لانهاية ($\infty$ )
المتتالية رقم (٣) : ٣ ، ٦ ، ١٢ ، ... متتالية لانهائية
حدها الأول = ٣ ، وأساسها = ٢
عدد حدودها ن = $\infty$
لاحظ أنه كلما كبرت ن كبرت قيمة $ح_ن$

$\therefore$ مجموع المتتالية $جـ_\infty$ $= \dfrac{أ\,(ر^{ن} - ١)}{ر - ١} = \dfrac{٣\,(ر^{\infty} - ١)}{٢ - ١}$

$= ٣\,(\infty - ١) = ٣ \times \infty = \infty$

( أى عدد قيمته العددية أكبر من الواحد إذا رفع إلى قوة تساوي مالانهاية فإن قيمته تكون مالانهاية . اى $ر < -١$ أو $ر > ١ \Leftarrow ر^{\infty} = \infty$

$\therefore$ لايمكن ايجاد مجموع المتتالية الهندسية اللانهائية إذا كان أساسها أكبر من ١ عددياً

المتتالية الهندسية ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$، ...

حدها الأول = ١ ، أساسها = $\frac{١}{٢} < ١$ وعدد حدودها لانهائي

هل يمكن إيجاد مجموع هذه المتتالية إلى ما لانهاية ؟
دعنا نحاول . بما أن $ر < ١$ فإن :

$$جـ_ن = \frac{أ\,(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$$

$$جـ_\infty = \frac{(١ - (\tfrac{١}{٢})^{\infty})}{١ - \tfrac{١}{٢}} = ٢ - ٢\,(\tfrac{١}{٢})^{\infty}$$

لاحظ أن المقدار $(\frac{1}{2})^{ن}$ كلما زادت قيمة ن صغرت قيمته . مثلاً :

$(\frac{1}{2})^{2} = \frac{1}{4}$ ، $(\frac{1}{2})^{5} = \frac{1}{32}$ ، $(\frac{1}{2})^{10} = \frac{1}{1024}$

$\therefore (\frac{1}{2})^{\infty} \leftarrow$ صفر

أي عدد أقل من الواحد عددياً إذا رفع إلى قوة مالانهاية اقتربت قيمته من الصفر.

$-1 < ر < 1 \Leftarrow ر^{\infty} \leftarrow$ صفر

أو نقول أن $ر^{\infty} =$ صفر

$\therefore$ $جـ_{\infty} = 2 - 2 \times$ صفر $= 2$

ويمكن بالطريقة نفسها إيجاد مجموع المتتالية الهندسية اللانهائية التي حدها الأول أ وأساسها ر

حيث $-1 < ر < 1$ بالقانون .

$$جـ_{\infty} = \frac{أ(1 - ر^{ن})}{1 - ر} = \frac{أ - أ ر^{\infty}}{1 - ر}$$

وحيث أن $ر^{\infty} =$ صفر

$$\therefore جـ_{\infty} = \frac{أ - أ \times صفر}{1 - ر} = \frac{أ}{1 - ر}$$

$$\boxed{\therefore \quad جـ_{\infty} = \frac{أ}{1 - ر}}$$

قد تصيبك الدهشة إذا علمت أن المتتالية الهندسية اللانهائية مجموعها $\frac{أ}{1 - ر}$ فقط . ولكن دعنا نتأمل المثال التالي :

لدينا قماش طوله ٢٠٠ متراً قطعناه إلى نصفين كل نصف يساوي ١٠٠ متر ، ثم قطعنا أحد النصفين إلى نصفين آخرين واستمرينا بهذه الطريقة . فإذا جمعنا هذه القطع فسنتحصل على متتالية هندسية لانهائية

$100 + 50 + 25 + 12,5 + \ldots$

ومجموع هذه القطع ينبغي أن يكون ٢٠٠ متر .

دعنا نطبق القاعدة التي تحصلنا عليها لجمع المتتالية الهندسية اللانهائية التى أساسها أقل من ١ .

$$جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} \quad ، أ = ١٠٠ \text{ ، } ر = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore جـ_{\infty} = \frac{١٠٠}{١ - \frac{١}{٢}} = ٢ \times ١٠٠ = ٢٠٠ \text{ متر}$$

وهو الطول الفعلى للقماش .

وبالمثل إذا أردنا قطع المسافة بين مدينتين البعد بينهما يساوي ٨ كيلومتر ، فإن ذلك يقتضى بالضرورة قطع نصف المسافة أولاً (٤ كلم) ثم نصف المسافة المتبقية ( ٢ كلم ) ثم نصف المسافة المتبقية ( ١ كلم ) وهكذا ... ويمكن تمثيل ذلك بمتتالية هندسية لانهائية كما يلي :

$$٤ \text{ ، } ٢ \text{ ، } ١ \text{ ، } \frac{١}{٢} \text{ ، } \frac{١}{٤} \text{ ، } ...$$

وبهذه الطريقة لانستطيع نظرياً أن نصل إلى المدينة الأخرى ولكننا نصلها عملياً.

وذلك مما يدعنا نطمئن إلى أن المتتالية اللانهائية التي يقل فيها الأساس عن الواحد يمكن جمع حدودها بالعلاقة السابقة $\left( جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} \right)$

وإذا طبقنا العلاقة على المثال الأخير حيث

أ = ٤ ، ر = $\frac{١}{٢}$ نجد أن :

$$جـ_{\infty} = \frac{٤}{١ - \frac{١}{٢}} = ٨ \text{ كيلومترات}$$

وهى المسافة الحقيقية بين المدينتين .

**مثال (١) :**

جد مجموع حدود المتتالية الهندسية

٢٥ ، ٢٠ ، ١٦ ، ...

**الحل :**

$$أ = ٢٥ \text{ ، } ر = \frac{٢٠}{٢٥} = \frac{٤}{٥} < ١ \text{ ، } ن = \infty$$

$\therefore$ جـ$_\infty$ = $\frac{أ}{١ - ر}$ = $\frac{٢٥}{١ - \frac{٤}{٥}}$ = $\frac{٢٥}{\frac{١}{٥}}$ = ١٢٥

**مثال (٢) :**
إذا كان مجموع الحدين الأول والثاني من متتالية هندسية لانهائية يساوي $\frac{٣}{٨}$ ، وكان مجموع حدودها = $\frac{١}{٢}$ جد كلاً من أساس المتتالية وحدها الأول .

**الحل :**

أ + أ ر = $\frac{٣}{٨}$ (١)

$\frac{١}{٢}$ = $\frac{أ}{١ - ر}$ (٢)

من (١) أ = $\frac{٣}{٨(١ + ر)}$

عوض في (٢) $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٣}{٨ (١ + ر) (١ - ر)}$

$\therefore$ $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٣}{٨(١ - ر^٢)}$ $\Leftarrow$ $\frac{١}{٢}$ × ٨ (١ - ر$^٢$ ) = ٣

$\therefore$ ١ - ر$^٢$ = $\frac{٣}{٤}$ $\Leftarrow$ ر$^٢$ = $\frac{١}{٤}$

$\therefore$ ر = ± $\frac{١}{٢}$

في حالة ر = $\frac{١}{٢}$ ، أ = $\frac{١}{٤}$

في حالة ر = $\frac{-١}{٢}$ ، أ = $\frac{٣}{٤}$

مثال (٣) متتالية هندسية مجموعها إلى ما لانهاية =١٢ وأساسها = $\frac{١}{٣}$ جد حدها الأول

الحل :

$$ج_\infty = \frac{أ}{١ - ر} \quad \therefore \quad ١٢ = \frac{أ}{١ - \frac{١}{٣}}$$

$$\therefore أ = ١٢ \times \frac{٢}{٣} = ٨$$

مثال (٤) أوجد قيمة $١ - \frac{٣}{٤} + \frac{٩}{١٦} - \frac{٢٧}{٦٤} + \ldots \infty$

الحل :

أ= ١، ر = $-\frac{٣}{٤}$

$$ج_\infty = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{١}{١ + \frac{٣}{٤}} = \frac{١}{\frac{٧}{٤}} = \frac{٤}{٧}$$

مثال (٥) بسط ١+ جاس +جا$^٢$س +... $\infty$ ( حيث س= ٤٥°)

الحل : أ = ١ ، ر = جا٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

$$ج_\infty = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{١}{١ - \frac{١}{\sqrt{٢}}} = \frac{١}{\frac{\sqrt{٢} - ١}{\sqrt{٢}}} = \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢} - ١}$$

$$= \sqrt{٢}(\sqrt{٢} + ١)$$

**مثال (٦) :**

اكتب الكسور العشرية التالية في شكل كسور اعتيادية

(أ ) $٠,\overline{٣}$ (ب) $٤,١\overline{٩٥}$

**الحل :**

(أ ) $٠,\overline{٣} = ٠,٣٣٣٣٣٣٣٣٣ \ldots$ (تتكرر الثلاثة إلى ما لا نهاية) ويمكن كتابة

$٠,\overline{٣}$ على النحو التالي :

$$٠,\overline{٣} = \frac{٣}{١٠} + \frac{٣}{١٠٠} + \frac{٣}{١٠٠٠} + \ldots \infty$$ لماذا ؟

لاحظ أننا كونّا متتالية هندسية لانهائية فيها

أ = $\frac{٣}{١٠}$ ، ر = $\frac{١}{١٠}$ > ١ ، ن = $\infty$

$$\therefore ج_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{\frac{٣}{١٠}}{١ - \frac{١}{١٠}} = \frac{٣}{١٠} \times \frac{١٠}{٩} = \frac{١}{٣}$$

$$\therefore ٠,\overline{٣} = \frac{١}{٣}$$

( لاحظ أنه يمكن تحويل الكسور العشرية الدورية إلى كسور اعتيادية باستخدام مجموع المتتالية الهندسية اللانهائية ) .

(ب) $٤,١\overline{٩٥} = ٤,١٩٥٩٥٩٥٩٥٩٥ \ldots$ ( تتكرر ٩٥ إلى مالانهاية )

$$\therefore ٤,١\overline{٩٥} = ٤ + \frac{١}{١٠} + \frac{٩٥}{١٠٠٠} + \frac{٩٥}{١٠٠٠٠٠} + \frac{٩٥}{١٠٠٠٠٠٠٠} + \ldots \infty$$

$$= ٤ + \frac{١}{١٠} + \frac{٩٥}{١٠^{٣}} + \frac{٩٥}{١٠^{٥}} + \ldots \infty$$

$$= ٤ + \frac{١}{١٠} + \frac{٩٥}{١٠^{٣}} \left[ ١ + \frac{١}{١٠^{٢}} + \frac{١}{١٠^{٤}} + \cdots \infty \right]$$

المتتالية داخل القوسين متتالية هندسية لانهائية فيها

أ = ١ ، ر = $\frac{١}{١٠^{٢}}$ ، ن = ∞

$$\therefore \text{جـ}_{\infty} = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}} = \frac{١}{١ - \frac{١}{١٠^{٢}}} = \frac{١٠٠}{٩٩}$$

$$\therefore ٤,١\overline{٩٥} = ٤ + \frac{١}{١٠} + \frac{٩٥}{١٠^{٣}} \times \frac{١٠٠}{٩٩}$$

$$= ٤ + \frac{١}{١٠} + \frac{٩٥}{٩٩٠}$$

$$= ٤ + \frac{١٩٤}{٩٩٠} = ٤\frac{٩٧}{٤٩٥}$$

**مثال (٧) :**

سقطت كرة مطاطية من ارتفاع ١٦ قدم فأصبحت ترتد وتسقط إلى أن سكنت ، ففي كل مرة كانت ترتد إلى ارتفاع يساوي $\frac{١}{٢}$ الارتفاع الذى ارتفعت اليه بعد الارتداد السابق ، جد

(أ ) ارتفاع الكرة الذى ترتد إليه بعد الصدمة العاشرة .

(ب) المسافة التى قطعتها الكرة قبل أن تسكن .

**الحل :**

( أ) ارتفاع الكرة بعد الصدمة الأولى = ٨ قدم

ارتفاع الكرة بعد الصدمة الثانية = ٤ قدم

ارتفاع الكرة بعد الصدمة الثالثة = ٢ قدم ٠٠ وهكذا

∴ يمكن تمثيل هذه الارتفاعات بالمتتالية الهندسية اللانهائية التالية :

٨ ، ٤ ، ٢ ، ١ ، ٠٠٠

أ = ٨ ، ر = $\frac{١}{٢}$ ، ن = ١٠

$ح_{١٠} = أ ر^{٩} = ٨ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٩} = \frac{٢^{٣}}{٢^{٩}} = \frac{١}{٢^{٦}} = \frac{١}{٦٤}$ قدم

(ب) المسافة التى قطعتها الكرة قبل السكون

$= (١٦ + ٨ + ٤ + \cdots \infty) + (٨ + ٤ + ٢ + ١ + \cdots \infty)$ ( لماذا )

$= م_{١} + م_{٢}$ حيث

$م_{١} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{١٦}{١ - \frac{١}{٢}} = ٣٢$ قدماً

$= \frac{٨}{١ - \frac{١}{٢}}$

$م_{٢} = ١٦$ قدماً

$\therefore م_{١} + م_{٢} = ٣٢ + ١٦ = ٤٨$ قدماً .

**تمرين (٦ – ٦)**

١/ جد مجموع حدود المتتاليات الهندسية التالية :

(أ ) ١ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{١٦}$ ، $\frac{١}{٦٤}$ ، $\cdots \infty$

(ب) ١ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{١}{٢٧}$ ، $\cdots \infty$

(ج) ١ ، ٠,٤ ، ٠,١٦ ، ٠,٠٦٤ ، $\cdots \infty$

(د ) ١ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{١٢٥}$ ، $\frac{١}{٦٢٥}$ ، $\cdots \infty$

٢/ متتالية هندسية مجموعها إلى مالانهاية يساوي دائماً ضعف حدها الأول جد أساسها .

٣/ جد قيمة $\frac{٩ + ٣ + ١ + \cdots \infty}{٤ + ٢ + ١ + \cdots \infty}$

٤/ جد قيمة ١ + ظاس + ظا$^{٢}$س + $\cdots \infty$ حيث س = ٣٠°

٥/ متتالية هندسية لانهائية ، مجموع حديها الأول والثانى يساوى ١٠٠ ، وحدها الثالث $٨\frac{١}{٣}$ ، جد مجموعها الكلى .

٦/ متتالية هندسية لانهائية ، مجموع حديها الأول والثالث ١٤٥ ، ومجموع حديها الثانى والرابع ٥٨ جد مجموع حدود المتتالية .

٧/ جد الحد الأول لمتتالية هندسية لانهائية أساسها $-\frac{١}{٣}$ ، ومجموع حدودها $٦\frac{٣}{٤}$

٨/ اكتب الكسور العشرية الدائرية التالية في شكل كسور اعتيادية (استخدم فكرة مجموع المتتالية الهندسية اللانهائية

(أ ) $٠,\overline{٦}$ (ب) $٠,\overline{١}$

(جـ ) $٠,\overline{١٨}$ (د ) $٠,\overline{٤٥}$

٩/ سقطت كرة مطاطية من ارتفاع ٢٧ قدماً ، فكانت بعد كل صدمة ترتد إلى ارتفاع يســـاوى $\frac{١}{٣}$ المسافة التى سقطت منها ، جد

( أ ) ارتفاع الكرة بعد الصدمة السادسة مباشرة

(ب) المسافة التى قطعتها الكرة قبل أن تسكن

١٠/ يرتفع منطاد مملؤ بالهواء الساخن إلى أعلى ، فإذا كان ارتفاعه بعد إطلاقه بدقيقة واحدة يساوي ٥٠ قدماً . ثم صار يرتفع بمعدل ٤٠٪ من الارتفاع الذي يرتفعه في الدقيقة السابقة لها . فما أعلى ارتفاع يرتفعه المنطاد ؟

١١/ إذا كان طول قوس التأرجح الأول الذى يصنعه بندول يساوى ١٢٠سم ، وكان طول قوس كل تأرجح لاحق يتناقص بمعدل ١٠٪ . جد مجموع المسافات التى يقطعها البندول قبل أن يتوقف عن الحركة .

١٢/ إذا كان طول القوس الذي يصنعه البندول في نهاية التأرجح الأول = ٩١ملم . وكان طول القوس يتناقص مع كل تأرجح بمعدل ٠,٧ ، فجد:

( أ) طول القوس في نهاية التأرجح الرابع .

(ب) مجموع المسافات التي يقطعها البندول قبل أن يتوقف تأرجحه .

## تمرين عام

(١) جد مجموع ن حداً من المتتالية الهندسية ١ ، ٢ ، ٤ ، ...
وإذا كان المجموع يساوي ٦٣ جد قيمة ن .

(٢) جد الحد النوني في المتتالية العددية ١٩ ، ١٦ ، ١٣ ، ...
ثم جد رتبة أول حد سالب فيها .

(٣) س ، س + ١، ٣س + ١ ، هي ثلاثة حدود متتالية .
جد قيمة س التي تجعل هذه المتوالية
( أ ) عددية (ب) هندسية

(٤) بسط : $١ + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٩} + ... \infty$

(٥) متتالية هندسية مجموعها إلى ما لا نهاية = ٣٢ وأساسها $\frac{١}{٢}$ جد حدها الأول.

(٦) حول $٠,\overline{٣٢}$ إلى كسر عادي .

(٧)حول $٠,\overline{١٤}$ إلى كسر عادي

(٨) في المتتالية الهندسية ١ ، ر ، $ر^{٢}$ ، ... الحد الأول والثانى والرابع في توال عددى ، جد قيمة ر التي تحقق ذلك .

(٩) ضع ثلاثة أوساط هندسية بين ٤ ، ٦٤ إذا كان الأساس موجباً .

(١٠) اكتب الحد النونى في المتتالية ٣ ، ١ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، ... ثم جد مجموعها إلى ما لانهاية .

(١١) في متتالية حسابية الحد الخامس يساوى ٣ ، ومجموع الحدود الثمانية الأولى يساوى ٢٣ . جد الحد الأول والأساس .

(١٢) متتالية هندسية ، حدها الثانى يساوي $\frac{١}{١٢}$ وحدها الرابع يساوى $\frac{١}{١٠٨}$ وأساسها موجب . جد مجموعها إلى ما لانهاية .

(١٣) متتالية حسابية حدها الثالث ٣٢ ، ومجموع حديها الثالث والخامس يساوي ٥٦ جد :
( أ ) حدها الأول وأساسها .
(ب) حدها النونى وترتيب أول حد سالب فيها .
(جـ ) كم حداً يؤخذ منها أبتداءً من حدها الأول ليكون المجموع صفراً

(١٤) متتالية هندسية ، مجموع حدودها الأربعة الأولى يساوي ١٥ ، ومجموع الأربعة التي تليها يساوى $\frac{١٥}{١٦}$. جد حدها الأول وأساسها .

**تذكر أن** :

١ /المتتالية هي تطبيق مجاله مجموعة الأعداد الطبيعيـــة أو مجموعة جزئية منها وتبدأ بالواحد ويسمى العنصر الأول منها بالحد الأول.

٢ /المتتالية الممثلة بالقاعدة $ح_١$ = أ ، $ح_{ن+١}$ = $ح_ن$ + د حيث أ ، د ثابتـــان ، تسمى متتالية حسابية . ويطلق على العدد د أساس المتتالية الحسابية . وعلى هـــذا فإن المتتالية الحسابية تكتب على الصورة أ ، أ + د ، أ +٢د ،...

٣ /المتتالية المعطاة بالقاعدة : $ح_١$ = أ ، $ح_{ن+١}$ = $ح_ن$ ر حيـــث أن أ ، ر ثابتان. تسمى متتالية هندسية ويطلق على العدد ر أساس المتتالية . أ ≠ صفر ، ر ≠ صفر.

٤/ $جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$

أكمل :

(١) الحد العام لمتتالية الحسابية = .....................

(٢) الحد العام لمتتالية الهندسية = .....................

(٣) مجموع المتتالية الحسابية :

أ / ......................

ب/ ......................

(٤) مجموع المتتالية الهندسية

أ / ......................

ب/ .....................

# الوحدة السابعة :

# المتباينات والبرمجة الخطية

**أهداف الوحدة السابعة :**

بعد نهاية هذه الوحدة يتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن :

١ /يعرّف المتباينات .
٢ /يعرّف خواص المتباينات .
٣ /يحل المتباينات في متغيرواحد ويمثلها هندسياً .
٤ /يحل المتباينات في متغيرين ويمثلها هندسياً ويجد منطقة الحل.
٥ /يعرّف البرمجة الخطية ويحل مسائلها.

## الوحدة السابعة
## المتباينات والبرمجة الخطية

**(٧ – ١) المتباينات :**

مر بنا في دراستنا السابقة بالصف السابع بمرحلة التعليم الأساسى أن المتباينة جملة رياضية تحتوي على أحدى علامات التباين وهي : < ، > ، ≥ ، ≤ ، ≠ .

وعرفنا أنه إذا كان أ ، ب عددين حقيقين مختلفين فإما أن يكون أ – ب عدداً موجباً وعندها يكون أ اكبر من ب ونعبر عن ذلك على النحو أ > ب .
أو أ – ب عدداً سالباً . وعندها يكون أ اصغر من ب ونعبر عن ذلك على النحو أ < ب .
وبالمثل أ – ب ≤ ٠ يعني أن أ ≤ ب . وكذلك أ – ب ≥ ٠ يعني أن أ ≥ ب .
وقد ندمج احياناً عبارتين معاً على النحو التالي :
إذا كان أ < ب ، ب < جـ فنكتب ذلك اختصاراً على النحو التالي :

أ < ب < جـ

فمثلاً : ٣< ٧ > ١١

٩ > ٧ > ٣

**خواص المتباينات :**

من خواص المتباينات ما يلي :

(١) إذا كان س < ص ، أ أي عدد حقيقي ، يكون :
س + أ < ص + أ

(٢) إذا كان س < ص ، أ أي عدد حقيقي موجب ، يكون :
أ س < أ ص

(٣) إذا كان س < ص ، أ أي عدد حقيقي سالب ، يكون :
أ س > أ ص

(٤) إذا كان س ، ص ، ع أعداداً حقيقية وكان
س < ص ، ص < ع ، يكون
س < ع
سنبرهن لك الخاصيتين (١) ، (٤) ونترك لك برهان بقية الخواص كتدريب :
(١) إذا كان س < ص ، أ أي عدد حقيقي يكون :
س + أ < ص + أ
**البرهان :**
س < ص
∴ ص – س > ٠ ( من التعريف)
لكن ص – س = ( ص + أ ) – ( س + أ )
∴ ( ص + أ ) – ( س + أ ) > ٠
∴ ( س + أ ) < ص + أ
(٤) إذا كان س ، ص ، ع أعداداً حقيقية وكان
س < ص ، ص < ع يكون
س < ع
**البرهان :**
من تعريف المتباينة ( ص – س ) ، ( ع – ص ) عددان موجبان لكن
ع – س = ( ع – ص ) + ( ص – س )
وبما أن الطرف الايسر حاصل جمع عددين موجبين فهو موجب
∴ ع – س > ٠
∴ س < ع
لاحظ أنه من الخواص السابقة نستطيع أن نستنتج أن :
(١) اضافة أي عدد حقيقي لطرفى المتباينة لا يغير من رمز المتباينة .
(٢) إن رمز المتباينة يبقى كما هو عند ضرب الطرفين في العدد الموجب ولكنه ينعكس عند الضرب في العدد السالب .

هذه خواص تستخدم عند حل المتباينات البسيطة أو المركبة كما يمكن تمثيل الحل هندسياً على خط الأعداد كما في الأمثلة التالية :

**مثال (١) :**

حل المتباينة :

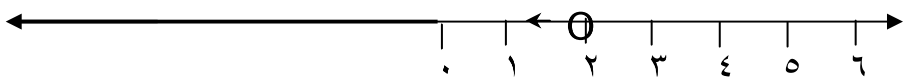
١٣ س – ٧ < ١٩

**الحل :**

باضافة ٧ لكل جانب ينتج ١٣ س < ٢٦ الخاصية (١)

بالضرب في ١/١٣ وهو موجب ينتج س < ٢ الخاصية (٢)

وتمثيلها على خط الأعداد يبدو كما في الشكل التالى :




لاحظ أن الدائرة على العدد ٢ غير مظللة تدل على أن العدد ٢ لا ينتمي إلى مجموعة الحل .

**مثال (٢) :**

حل المتباينة المركبة

–٧ < ٤ س + ٣ < ٧

**الحل :**

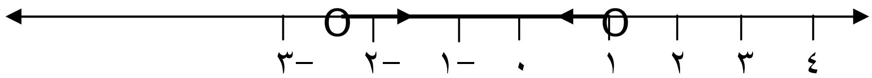
باضافة –٣ إلى جميع الأطراف نحصل على

–١٠ < ٤ س < ٤

وبضرب جميع الأطراف في ١/٤ وملاحظة أنه موجب نجد أن :

–٥/٢ < س < ١

فتكون منطقة الحل ممثلة بالشكل التالي :




**مثال (٣)**

حل المتباينة المركبة

٣ ≤ ٥ – ٢ س < ٧

**الحل :**

باضافة –٥ إلى جميع الأطراف نحصل على

٣ + (–٥) ≤ ٥– ٢ س + (–٥)< ٧ + (–٥)

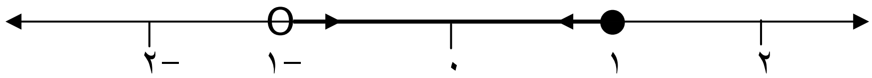
–٢ ≤ –٢ س < ٢

نضرب الأطراف في –١/٢ ونلاحظ أن –١/٢ سالب فنحصل على :

–١/٢ × (–٢) ≤ –١/٢ × (–٢) س > –١/٢ × ٢

١ ≤ س > –١

ويمكن تمثيلها بيانياً بالشكل التالى :




تلاحظ أن الدائرة حول الواحد ظللت تماماً لتعنى أن الواحد عنصر من عناصر مجموعة الحل

ومن صور المتباينات المركبة المتباينة في صورة القيمة المطلقة مثل

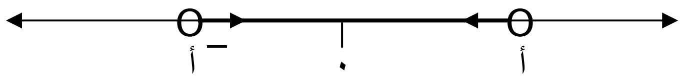
| س | < أ

وقد مر بنا سابقاً أن :

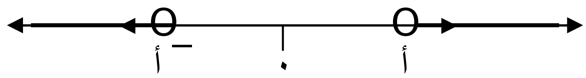
| س | = س إذا كان س ≤ ٠

| س | = – س إذا كان س < ٠

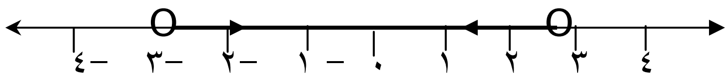
معنى ذلك أن القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي غير سالبة على الدوام .
فالمتباينة | س | < أ تعني أن بعد النقطة التي تمثل العدد س من نقطة الأصل صفر يقل عن أ .
وحيث أن س قد يكون موجباً أو سالباً .
∴ | س | < أ يعنى أن :
– أ < س < أ
وتمثيلها الهندسى هو :




أما في حالة | س | > أ ، فإنه إما س > أ أو – س > أ
⇐ س > أ أو س < – أ
وتمثيلها الهندسى هو




فمثلاً | س | < ٣ تعنى أن :
– ٣ < س < ٣ ، ويمثلها الشكل :




**مثال (١) :**
بيّن هندسياً المتباينة :
| ٢ س – ٣ | ≤ ٤

**الحل :**

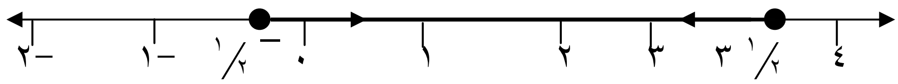
المتباينة تعني

−٤ ≤ ٢ س − ٣ ≤ ٤

−٤ + ٣ ≤ ٢ س − ٣ + ٣ ≤ ٤ + ٣

−١ ≤ ٢ س ≤ ٧

−١/٢ ≤ س ≤ ٧/٢




**مثال (٢) :**

حل المتباينة التالية ومثلها هندسياً :

| ٣ − ٢س | > ٧

**الحل :**

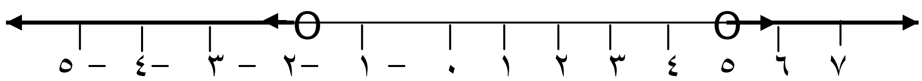
| ٣ − ٢ س | > ٧ تعنى أنه

أما ٣ − ٢ س > ٧ أو ٣ − ٢ س < −٧

⇐ −٢ س > ٤ أو − ٢ س < −١٠

⇐ س < −٢ أو س > ٥

ويمثلها هندسياً الشكل :




**تمرين (٧ − ١)**

حل كلاً من المتباينات التالية ، ومثل منطقة الحل هندسياً

(١) −٢ ≤ ٣ س + ٤ ≤ ٩

(٢) −٥ < ٣ س − ٢ < ٥

(٣) ٨ < ٣ س + ٢ ≤ ١٤

(٤) −٧ ≤ ٥ س − ٢ < ١٢

(٥) ١ < ٨ – ٢ س < ١٠

(٦) –١< ٣ س + ٤ ≤ ٠

(٧) ٣ ≤ س – ٤ ≤ ٨

(٨) –٧≤ ٣ – ٢ س ≤ ٥

(٩) | س – ٢ | ≤ ٥

(١٠) | ٢ – ٢ س | < ٦

(١١) |٢ س – ١ | ≤ ٣

(١٢) | $\frac{١}{٢}$ – $\frac{١}{٣}$ س | < ١

**(٧ – ٢) المتباينة الخطية في متغيرين :**

إذا اشتملت المتباينة على متغيرين س ، ص مثلاً كل منهما من الدرجة الأولى ولا تحوي حاصل ضربهما ، سميت المتباينة متباينة خطية في متغيرين.

فالمتباينات التالية :

٢ س + ص < ٧

٣ س – ٢ ص ≤ ٣

٥ س < ٣ – ٢ ص

٢ س + ص ≤ ١٢

كلها متباينات خطية في متغيرين . بينما المتباينات

ص < $س^{٢}$ + ١

س $ص^{٣}$ ≤ ٥ – ٢ ص

$\frac{١}{ص}$ < س + ٢ ص

**متباينات غير خطية .**

للمتباينة الخطية في متغيرين مجموعة تعويض ومجموعة حل . وتسمى مجموعة الحل منطقة حل المتباينة وعند تمثيل المتباينة الخطية ذات المتغيرين بيانياً يجب أن تؤخذ مجموعتا التعويض والحل بعين الاعتبار . وحلول المتباينة الخطية في متغيرين هى أزواج مرتبة تحقق المتباينة.

**مثال (١) :**

هل (٢ ، ٣) حل للمتباينة ٣ س – ص > ٧

**الحل :**

لنأخذ الطرف الأيمن من المتباينة وهو ٣ س – ص

ونعوض س = ٢ ، ص = ٣ في هذا الطرف لنجد

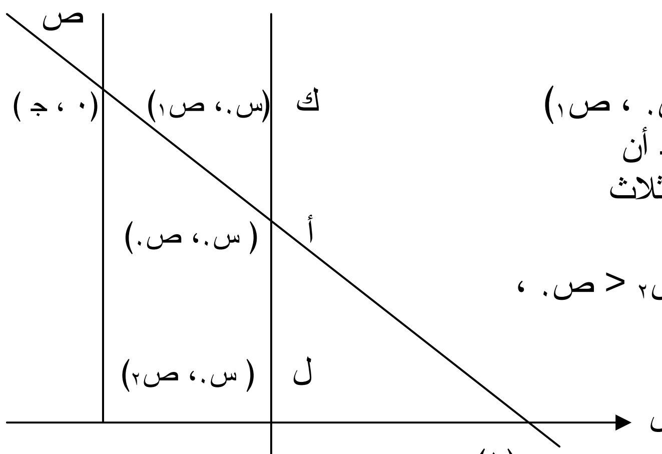
٣ × ٢ – ٣ = ٦ – ٣ = ٣

وبما أن الطرف الأيسر يساوى ٧ . فإن (٢ ، ٣ ) ليست حلاً لهذه المتباينة .

وإذا اعتبرنا أن (٢ ، ٣ ) احداثيا نقطة ما نجد أن هذه النقطة لا تقع في المنطقة التي تمثل حلاً للمتباينة الخطية في المجهولين س ، ص . والسؤال هو كيف نحدد المنطقة التى تمثل حل المتباينة الخطية في المجهولين س ، ص .

نعلم أن المعادلة ص = م س + جـ تمثل خطاً مستقيماً ميله م ويقطع المحور الصادى عند النقطة (٠ ، جـ ) .

الآن دعنا نرسم مستقيماً موازياً للمحور الصادي ليقطع المستقيم ص = م س + جـ عند النقطة أ . لنأخذ عليه النقطة ك فوق النقطة أ والنقطة ل تحت النقطة أ كما في الشكل (٧ – ١)




الشكل (٧ – ١)

نفرض أن احداثيات هذه النقاط كما يلى :

أ ( س. ، ص.) ، ك (س. ، ص$_1$)

ل ( س. ، ص$_2$) . لاحظ أن الاحداثى السينى للنقاط الثلاث متساوٍ ( لماذا ؟ )

وان ص$_1$ > ص. ، ص$_2$ < ص. ،

لكن ص. = م س.+ جـ

لأن ( س. ، ص.) نقطة على المستقيم .

∴ ص$_1$ > م س. + جـ (١)

ص$_2$ < م س. + جـ (٢)

المتباينة (١) صحيحة لكل النقاط الواقعة أعلى أ على المستقيم أ ك . والمتباينة (٢) صحيحة لكل النقاط الواقعة تحت أ على المستقيم أ ل . والاثنتان صحيحتان ايضاً لكل مستقيم آخر موازٍ للمحور الصادى . ومن ذلك نستنتج ما يلى :

(١) المتباينة ص > م س + جـ تمثل جميع النقاط على المستوى الواقعة فوق المستقيم ص = م س + جـ .

(٢) المتباينة ص < م س + جـ تمثل جميع النقاط على المستوى الواقعة تحت المستقيم ص = م س + جـ وعليه لرسم منطقة الحل لأى متباينة خطية في المتغيرين س ، ص تتبع الخطوات التالية :

(١) نضع المتباينة في الصورة القياسية ص < م س + جـ أو ص > م س + جـ

(٢) نرسم المستقيم ص = م س + جـ متقطعاً إذا اشتملت المتباينة على أحد الرمزين < ، > للدلالة على أن مجموعة الحل لا تشمل نقاط المستقيم، ونرسمه متصلاً إذا اشتملت المتباينة على أحد الرمزين ≥ ، ≤ لأن نقاط المستقيم في هذه الحالة ضمن نقاط مجموعة الحل .

(٣) نظلل منطقة الحل الواقعة أعلى المستقيم إذا كان رمز التباين > أو أسفل المستقيم إذا كان رمز التباين < .

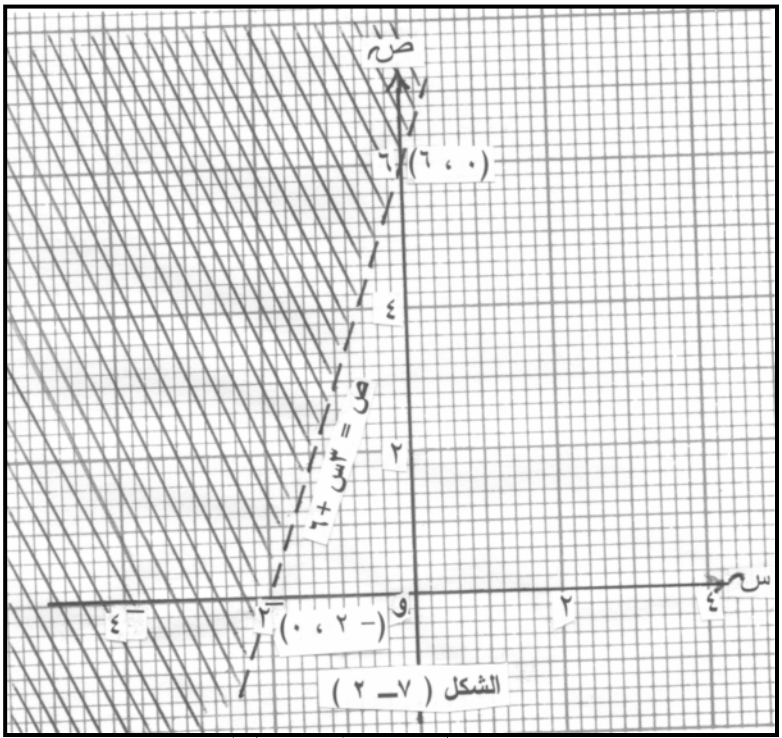
(٤) يمكن بطريقة أخرى تحديد منطقة الحل بأخذ نقطتين مختلفتين تقعان في جهتين مختلفتين من الخط المستقيم الذي يمثل المعادلة ونعوض احداثياها في المتباينة ، فالنقطة التى ينتج تعويض احداثياتها في المتباينة جملة صحيحة تقع في منطقة الحل .

**مثال (١) :**

ارسم المنطقة التى تمثل حل المتباينة :

ص > ٣ س + ٦

**الحل :**




( الشكل (٧ – ٢) )

نرسم المستقيم ص = ٣ س + ٦ بخط متقطع ونظلل المساحة الواقعة فوقه لأن رمز التباين هو > . وللتحقيق من صحة الحل خذ نقطة مثل (٠ ، ٧) وبتعويضها نجد أنها تحقق المتباينة حيث ٧ > ٣ × ٠ + ٦ ⟺ ٧ > ٦ ، ونقطة اسفل المستقيم (٠ ،٥ ) وبتعويضها نجد : الشكل (٧ – ٢)

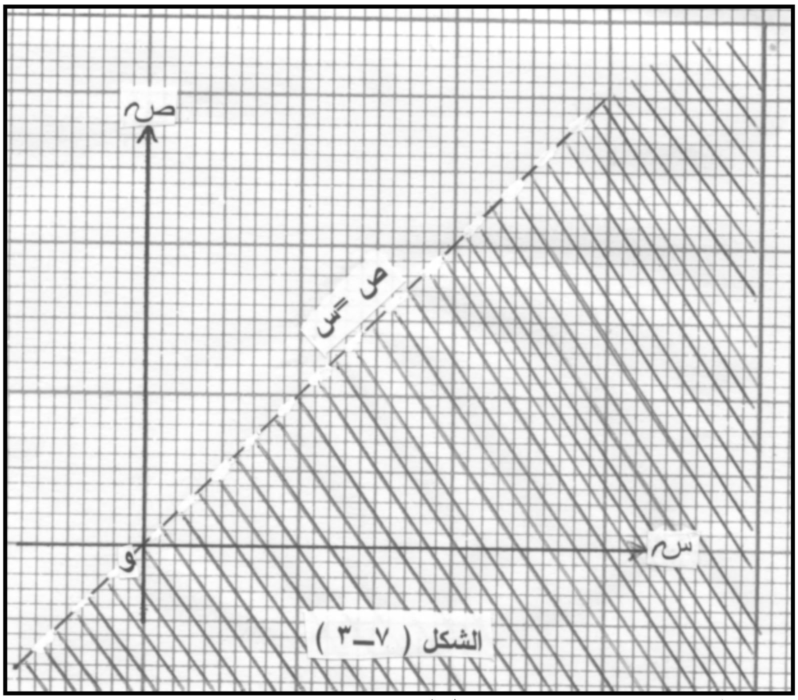
٥ > ٣ × ٠ + ٦ أى ٥ > ٦ وهذا غير صحيح فهى لا تحقق المتباينة .

**مثال (٢) :**

مثّل بيانياً حل المتباينة

ص < س

**الحل** : الشكل (٧ – ٣)




(١) نرسم المستقيم ص = س متقطعاً
(٢) نظلل المنطقة الواقعة أسفل المستقيم

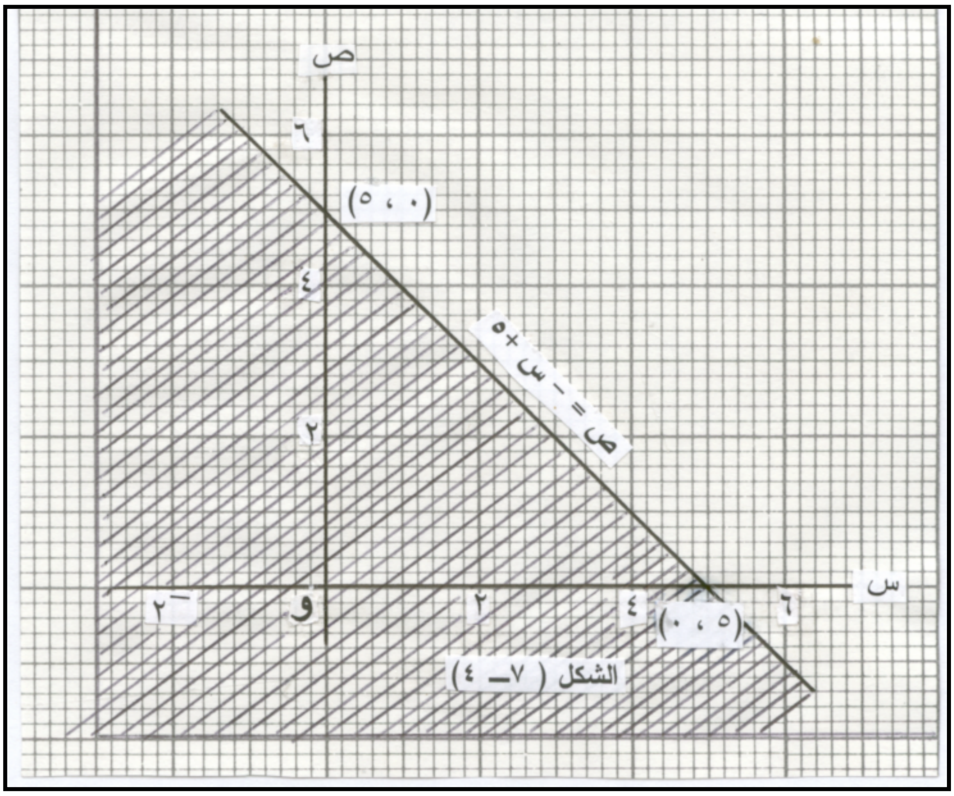
يمكن أن نختار نقطة مثل ( ١ ، ٠ )مثلاً ونعوض احداثياتها في المتباينةلاحظ أن ٠ < ١ عبارة صائبة مما يدل على أن المنطقة التى تقع فيها النقطة ( ١ ، ٠ ) هى منطقة الحل كما في الشكل ( ٧ – ٣ ) .

**مثال (٣) :**

مثل مجموعة حل المتباينة

س + ص ≤ ٥ في المستوى .

**الحل : (الشكل (٧ – ٤) )**




نكتب المتباينة أولاً في الصورة القياسية ص ≤ – س + ٥ ثم نرسم المستقيم ص= – س + ٥ وبما أن رمز التباين ≤ فإن منطقة الحل أسفل المستقيم .

نعلم أن س = أ تمثل مستقيماً موازياً المحور الصادي وعلى بعد | أ | وحدة منه. إذن فالمنطقة التي تمثل حل المتباينة س > أ في المستوى تعني جميع النقاط على المستوى بحيث يكون الاحداثى السيني أكبر من أ . أي جميع النقاط الواقع على يمين المستقيم س = أ وبالمثل : ص > ب تعنى جميع النقاط الواقعة

فوق المستقيم ص = ب وهو مستقيم موازٍ للمحور السينى وعلى بعد | ب | وحدة منه. ص < ب تعنى جميع النقاط الواقعة تحت المستقيم ص = ب

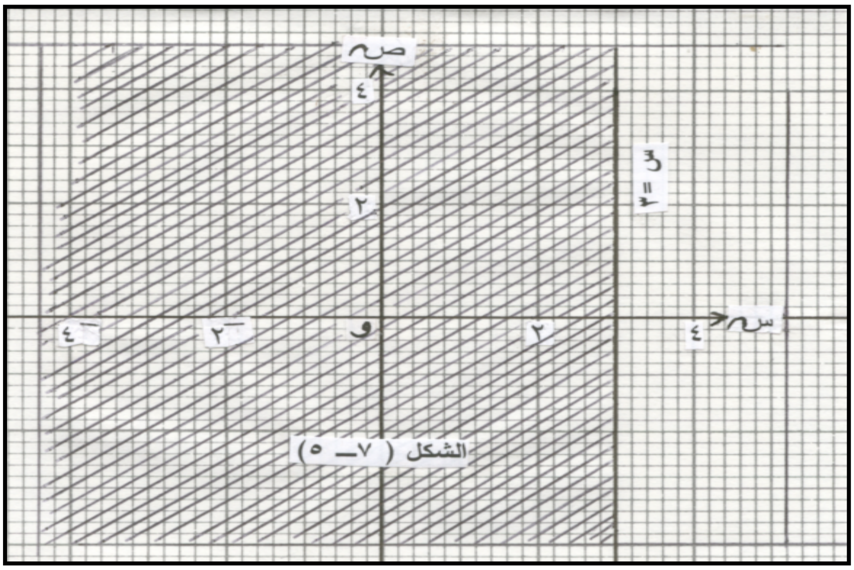
**مثال :**

مثل حل المتباينة س ≤ ٣ في المستوى

**الحل :**

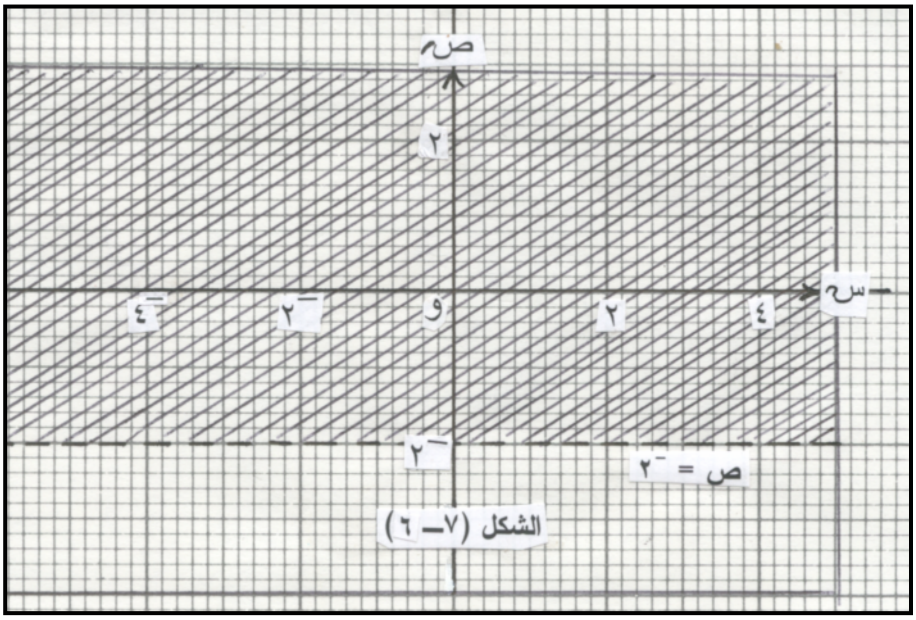
س ≤ ٣ تعنى جميع النقاط الواقعة على المستقيم س = ٣ وعلى يساره

الشكل (٧ – ٥)



**مثال (٤) :**
مثل على المستوى منطقة حل المتباينة ص > −٢

**الحل :**
نرسم المستقيم ص = −٢ متقطعاً ثم نظلل المنطقة فوقه
الشكل (٧ – ٦)



الشكل (٧– ٦)

**تمرين (٧– ٢)**

مثل منطقة حل كل من المتباينات التالية بيانياً على المستوى :

(١) س + ٢ ص ≤ ٥

(٢) ٢س – ص > ٣

(٣) ٣س + ٤ ص ≤ ١٢

(٤) ٥س + ٤ ص ≤ ٠

(٥) ٢س + ٣ ص < ١٢

(٦) ٣س + ٥ ص > ٢٠

(٧) ٤س – ٣ ص ≥ ٧

(٨) ص ≥ س – ٦

(٩) ص ≤ –١

(١٠) س ≥ ٠

**(٧ – ٣ ) حل نظام المتباينات الخطية في متغيرين :**

تشكل متباينتان خطيتان أو أكثر نظاماً من المتباينات الخطية في متغيرين . فمثلاً :

س+ ص ≥ ٣

س – ٢ ص ≥ صفر

هو نظام متباينتين . هل (–١، ٢) حل لهذا النظام ؟ حتى يكون(–١، ٢) حلاً فيجب أن يحقق المتباينتين معاً . لاحظ أن الطرف الأيمن من المتباينة الأولى عند تعويض (–١، ٢) هو –١ + ٢ = ١

وأن ١ ≥ ٣ . أى أن (–١، ٢) يحقق المتباينة الأولى .

أما بالنسبة للمتباينة الثانية فإن الطرف الأيمن فيها عند (–١، ٢) هو

–١ – ٢ × ٣ = –٧

وأن –٧≥ صفر .

أى أن (–١، ٢) يحقق المتباينة الثانية ايضاً .

لهذا فإن (-١، ٢) يعتبر حلاً من حلول هذا النظام .

أما إذا اردنا تحديد المنطقة التى تحتوى على كل حلول النظام . فإننا نحدد منطقة حل كل من متباينات النظام على حدة بالطريقة التى عرفناها سابقاً . ثم نأخذ المنطقة المشتركة بين حلول كل متباينات النظام فتكون هى منطقة حل النظام من المتباينات .

**مثال (١) :**

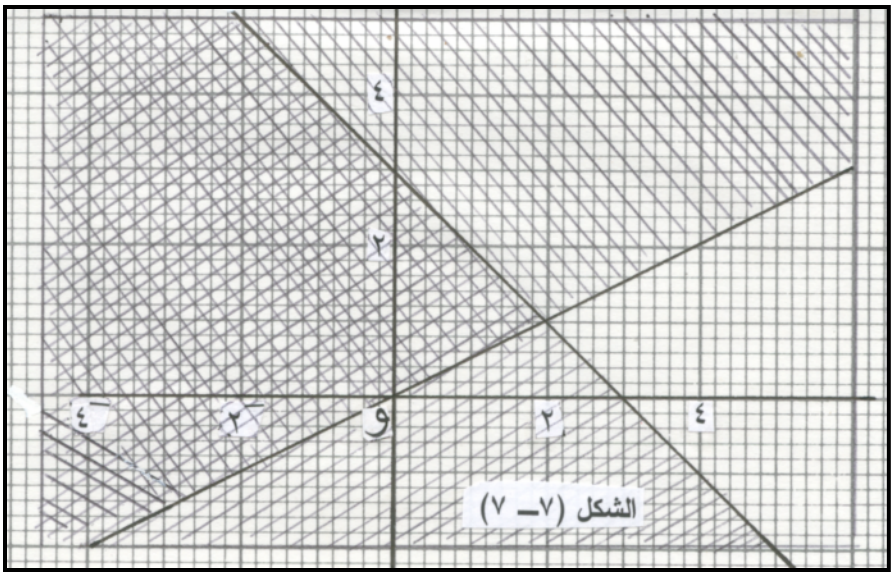
إرسم منطقة حل النظام .

س + ص ≥ ٣

س - ٢ ص ≥ صفر

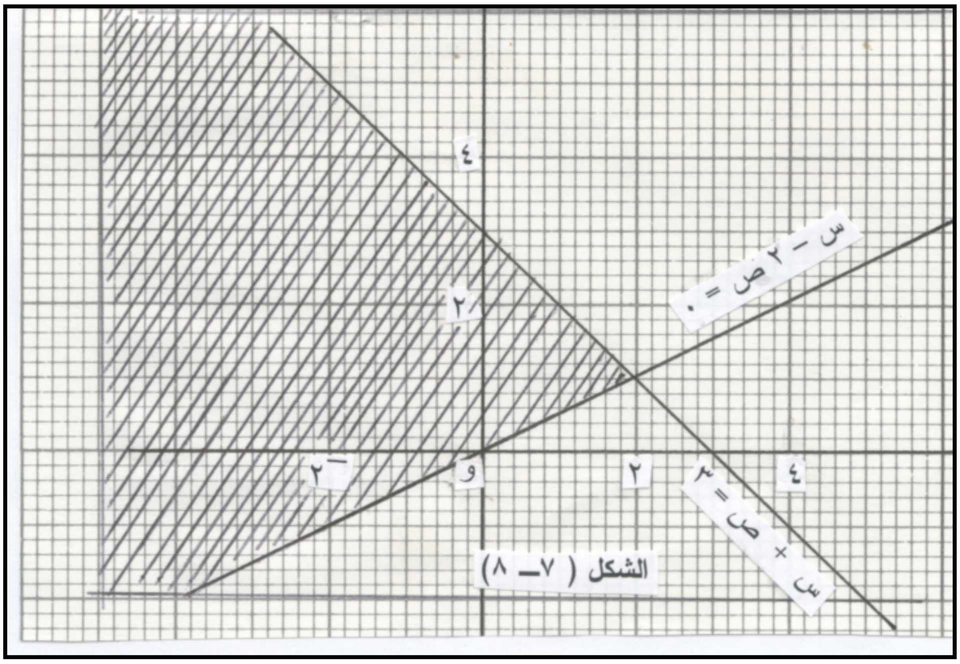
**الحل :**

نوجد أولاً منطقة حل المتباينة س +ص ≥ ٣ برسم المستقيم س + ص = ٣ متصلاً بما أن النقطة (-١، ٢) تقع في منطقة الحل فاننا نظلل هذه المنطقة وهي المنطقة الواقعة اسفل المستقيم . شكل (٧ - ٧)



الشكل (٧- ٧)

ولايجاد منطقة حل المتباينة س – ٢ ص ≤ صفر نرسم المستقيم س – ٢ ص = ٠ ونظلل المنطقة الواقعة فوقه فتكون المنطقة المشتركة هى التى تمثل منطقة حل النظام فإذا أعدنا الرسم مظللين فقط المنطقة المشتركة فإن منطقة حل النظام تبدو كما في الشكل (٧ – ٨) .



الشكل ( ٧ـ ٨)

**مثال (٢) :**

جد منطقة الحل المشترك لنظام المتباينات التالى :

س + ص ≤ ٢

٣ ص < ٢ س + ٦

ص + ٢ س < ٦

**الحل :**

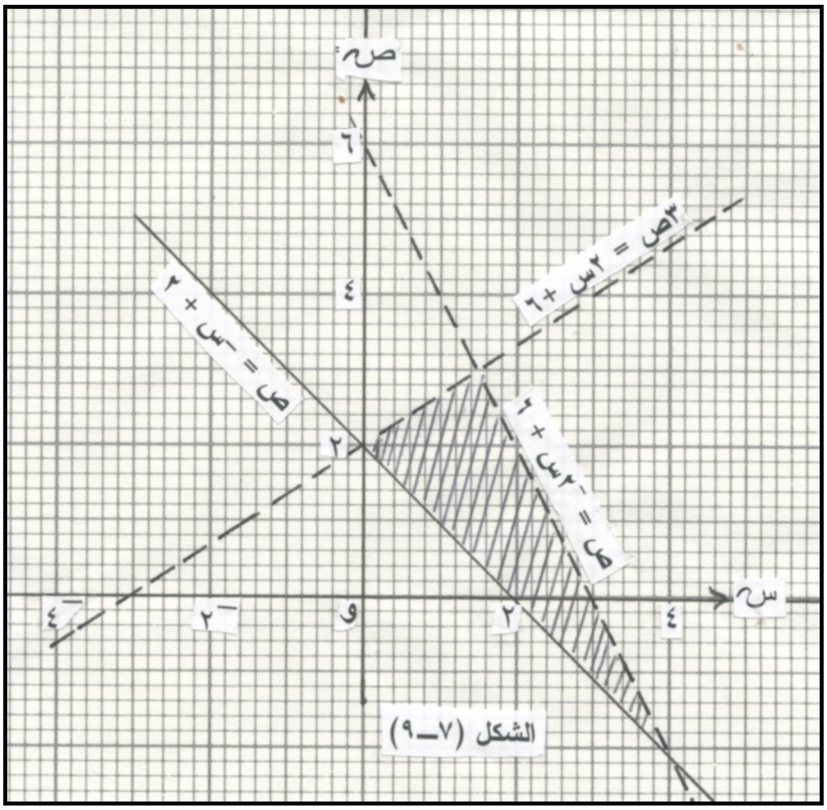
نضع كلاً من المعادلات الناتجة من المتباينات في الصورة القياسية .

ص = – س + ٢ (متصلاً )

٣ ص = ٢ س + ٦ (متقطعاً )

ص = −٢ س + ٦ (متقطعاً )

تكون المنطقة المظللة هى المنطقة المشتركة بين حل كل من متباينات النظام . وهى التى تمثل منطقة حل نظام المتباينات المعطى فى الشكل (٧ – ٩)



الشكل (٧–٩)

**مثال (٣) :**

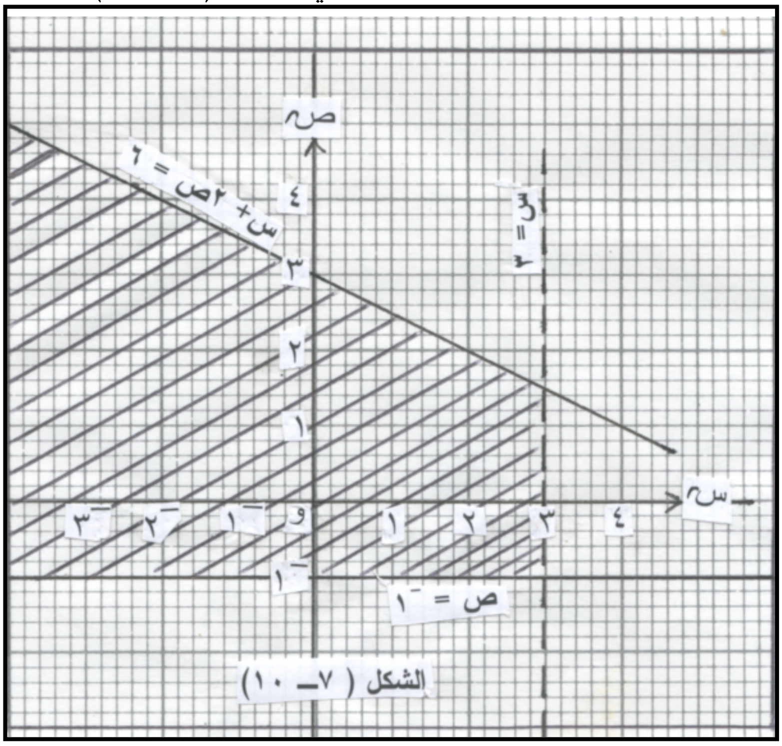
ارسم منطقة حل النظام

س < ٣ ، ص ≤ −١

س + ٢ ص ≥ ٦

**الحل :**

نرسم المستقيمات س = ٣ (متقطعاً ) ونظلل يساره ، والمستقيم ص = –١ (متصلاً) ونظلل المنطقة فوقه ، والمستقيم س + ٢ ص = ٦ (متصلاً) ونظلل المنطقة اسفله وتكون المنطقة المشتركة كما في الشكل (٧ – ١٠) .




**تمرين (٧ – ٣)**

(١) أي من النقط التالية تعتبر حلاً للنظام

٣ س – ص ≤ ٢ ، ص – ٥ س < ١

(٠ ، ١) ، (١ ، ١)

(٢ )أرسم منطقة حل كل من انظمة المتباينات التالية :

( أ ) س – ٢ ص ≤ ١ ، ٣ س – ٦ > ٢ ص

(ب) ٢ س + ص ≥ ٢ ، ٣ ص – ٢ س + ٦ ≤ ٠

(جـ ) ٢س – ص ≥ ٣ ، س + ١ > ص

(د ) ١ < س < ٤ ، ٣ س + ٢ ص <٧

(هـ ) ١ < س < ٤ ، –١ < ص < ٣

(٣) أرسم منطقة حل كل من انظمة المتباينات التالية

( أ ) –١≥س ≥ ٣ ، س – ص ≤ ٢

(ب) ٣ س +٢ ص ≥ ٦ ، س – ص ≥ ٤ ، س ≥ ٢

(جـ ) س + ٤ص ≥ ٤ ، س ≥ –١، ص ≥ ٠

(د ) س – ٢ ص ≤ ٤ ، –٢ ≥ س ≥ ١ ، ص ≤ –٣

(هـ ) ٢ س – ص ≥ ٤ ، | س | ≥ ٣ ، | ص | ≥ ٣

(٤) جد النقاط ذات الاحداثيات الصحيحة التى تحقق نظام المتباينات التالى :

٤ ص – ٥ س ≥ ٢٠

٣ س + ٢ ص + ٤ < ٠

٢ س + ٥ ص + ١٠ > ٠

**(٧ – ٤) تطبيقات على التمثيل البياني للمتباينة الخطية في متغيرين :**
**( البرمجة الخطية)**

تقوم في هذا العصر جل الأعمال وبصورة خاصة الصناعية منها على تخطيط مسبق ، والهدف من ذلك تسهيل العمل وتخفيض التكاليف والحصول على أكبر الأرباح واوسع الأسواق وغير ذلك من الأهداف . وتنفيذ هذا التخطيط يسمى برمجة ، وتقوم البرمجة على تمثيل الهدف إن كان زيادة انتاج أو إنقاص التكاليف أو زيادة الأرباح أو غيره بمعادلة ذات متغيرات تسمى دالة الهدف ، يمثل واقع العمل وشروطه بمتباينات في هذه المتغيرات تسمى القيود ، وسيقتصر تناولنا هنا على تمثيل متباينات القيود بمتباينات خطية من الدرجة الأولى بمتغيرين فقط س ، ص . كما أن معادلة الهدف ستكون بالشكل
ك = أ س + ب ص
حيث ك متغير يسمى الوسيط .

لحل مسألة برمجة خطية نحل نظام متباينات القيود فنتوصل إلى منطقة في المستوى الإحداثى تمثل مجموعة الحل ، وتسمى هذه المنطقة عادة فضاء الحل .

وقد وجد أن اكبر أو اصغر قيمة للوسيط ك تكون عند أحد نقاط رؤوس المضلع الذى يحيط بمنطقة الحل .

وسنبحث في المثال التالى اكبر واصغر قيمة للمقدار ك حيث

ك = $\frac{١}{٢}$ س + ص حيث س ، ص $\in$ ح

بحيث يكون :

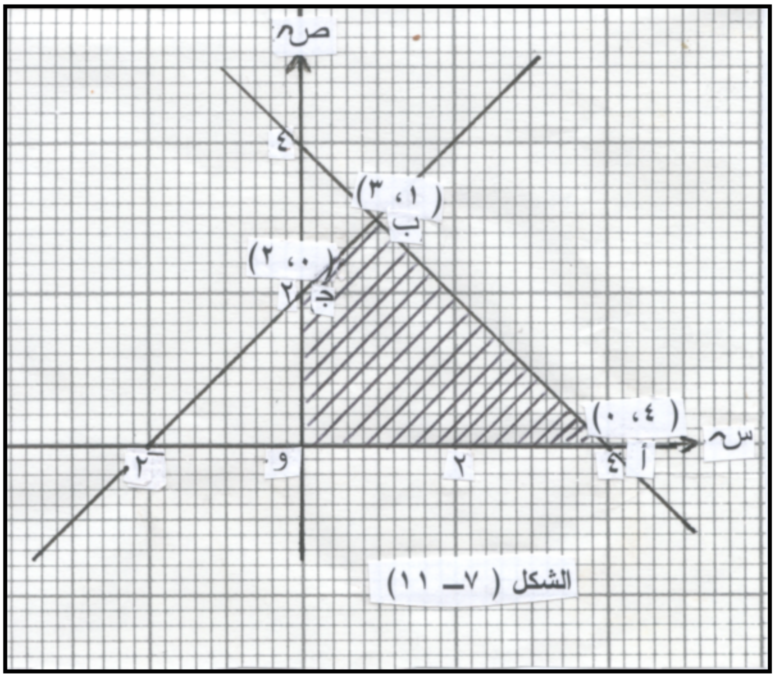
س $\leq$ ٠ ، ص $\leq$ ٠

ص $\geq$ س + ٢

ص $\geq$ ٤ – س

تلاحظ أن المتباينات الأربع تمثل القيود ، وأن الدالة ك = $\frac{١}{٢}$ س + ص تمثل دالة الهدف .

نوجد أولاً حل المتباينات على المستوى وتحديد فضاء الحل الشكل (٧ – ١١) . نجد أن فضاء الحل يمثله المضلع أ و جـ ب
حيث أ ( ٠ ، ٤ ) ، و (٠ ، ٠ ) ، جـ ( ٠ ، ٢ ) ، ب ( ١ ، ٣ )



الشكل ( ٧ ــ ١١ )

∵ ك = $\frac{١}{٢}$ س + ص

∴ ك$_{أ}$ = $\frac{١}{٢}$ × ٤ + ٠ = ٢

∴ ك$_{و}$ = $\frac{١}{٢}$ × ٠ + ٠ = ٠

∴ ك$_{جـ}$ = $\frac{١}{٢}$ × ٠ + ٢ = ٢

∴ كب = $\frac{١}{٢}$ × ١ + ٣ = ٣ $\frac{١}{٢}$

تلاحظ أن أكبر قيمة هي $\frac{١}{٢}$ ٣ عند الرأس ب ( ١ ، ٣ ) وأصغر قيمة هى صفر عند الرأس و (٠ ، ٠ ) . ونستطيع أن نحقق من الرسم البياني أنه لاتوجد نقطة داخل المنطقة المظللة تعطى قيمة أكبر من أو تساوي ما تعطية ب ولا أقل من القيمة التي تعطيها النقطة و ٠ .

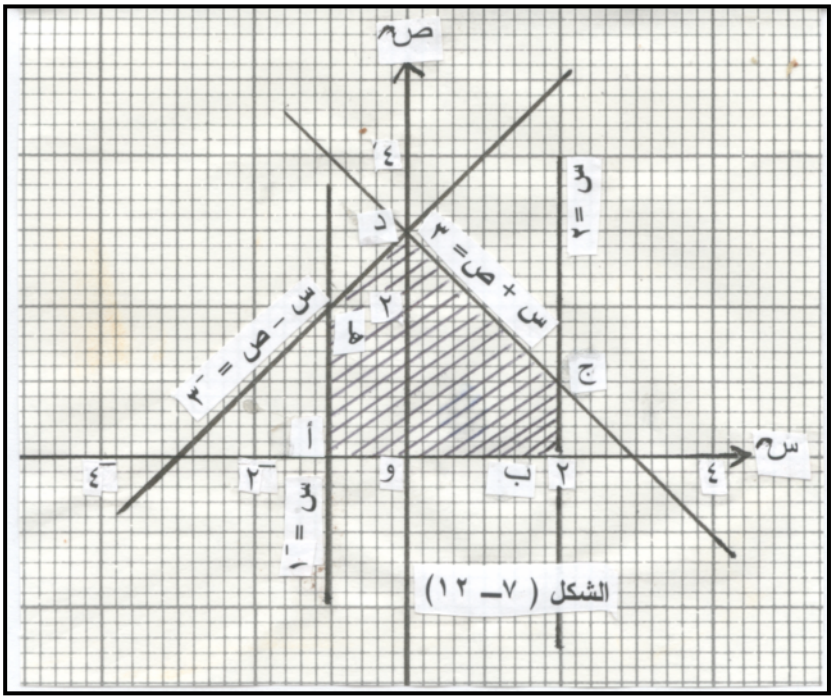
**مثال (١) :**

جد أكبر وأصغر قيمة للدالة ٢ س – ص بشرط أن تكون

س + ص ≤ ٣ ، س – ص ≥ -٣

ص ≥ ٠ ، -١ ≤ س ≤ ٢

**الحل :** شكل (٧ – ١٢)



نوجد أولاً الحل الآني للمتباينات لنعرف رؤوس المضلع الذي يمثل منطقة الحل وهو الخماسي أ ب جـ د هـ واحداثيات رؤوسه :

أ (-١، ٠) ، ب ( ٢ ، ٠) ، جـ (٢ ، ١ ) ، د ( ٠ ، ٣) ، هـ (-١، ٢ )

ونأخذ الدالة ٢ س – ص . أكبر وأصغر قيمة لها عند الرؤوس نحددها بعد ايجاد قيمتها عند كل رأس

القيمة عند أ (-١، ٠) = -٢

القيمة عند ب (٢ ، ٠ ) = ٤

القيمة عند جـ ( ٢ ، ١ ) = ٣

القيمة عند د ( ٠ ، ٣ ) = -٣

القيمة عند هـ (-١، ٢) =-٤

أكبر قيمة هى قيمته عند الرأس ب ( ٢ ، ٠ ) وتساوي ٤ وأصغر قيمة لها هى قيمتها عند الرأس هـ ( -١ ، ٢) وتساوي -٤

**مثال (٢) :**

صانع أحذية يصنع أحذية رجالية واحذية نسائية يربح في كل حذاء من النوع الأول ٥٠ ديناراً وفي كل حذاء من النوع الثاني ٧٠ ديناراً . يستغرق صنع حذاء الرجل ٦ ساعات ، وصنع حذاء المرأة ٧ ساعات . فإذا كانت ساعات عمله الأسبوعى ٤٢ ساعة . فما عدد الأحذية التي يصنعها من كل نوع خلال الأسبوع ليكون ربحه أعلى ما يمكن .

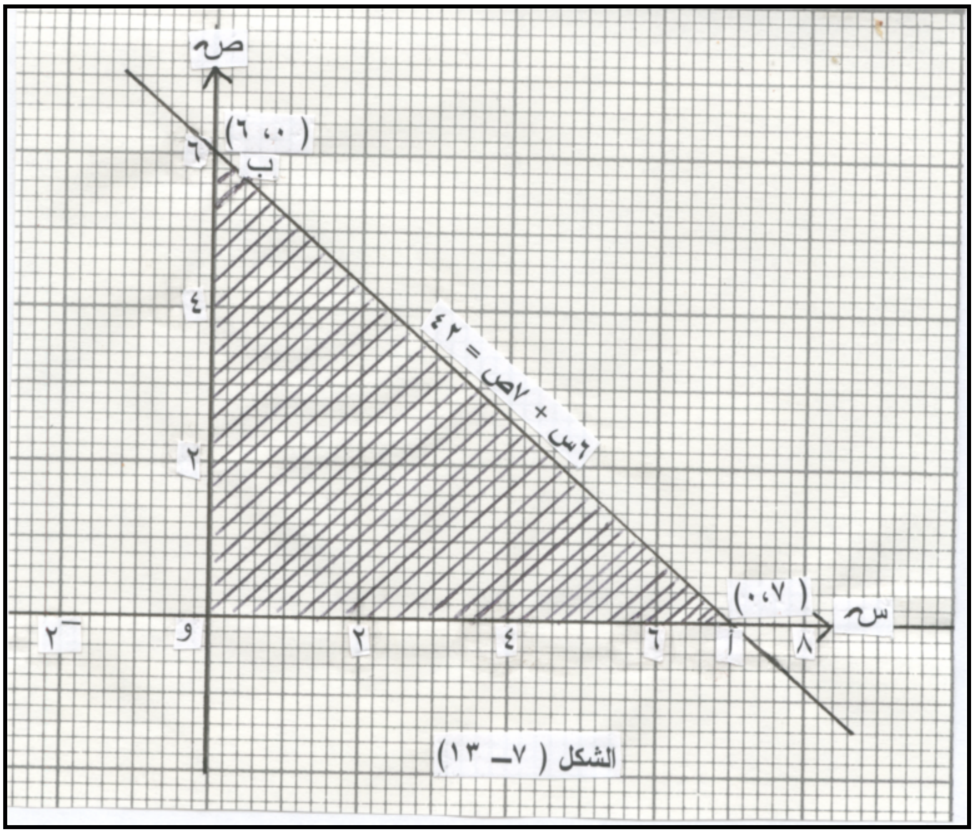
**الحل :**

إذا فرضنا أن عدد الأحذية الرجالية التى يصنعها في الاسبوع هو س ، وأن عدد الأحذية النسائية هو ص فتكون قيود الحل :

س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ ،

٦ س + ٧ ص ≥ ٤٢

المتباينتان الأولى والثانية تعنيان أن عدد الأحذية عدد موجب ، أما الأخيرة فتعنى أن عدد الساعات لصنع المطلوب من الأحذية لا يزيد عن ٤٢ ساعة في الاسبوع . نحدد منطقة الحل في الشكل (٧ – ١٣)



الشكل ( ٧ـ ١٣)

أن معادلة الهدف التي نحصل عليها بفرض أن ربحه الأسبوعي ك هى :

ك = ٥٠ س + ٧٠ ص

سنجد أن قيمة ك عند (٧ ، ٠ ) = ٥٠ × ٧ + ٧٠ × ٠ = ٣٥٠ ديناراً .

وقيمة ك عند (٠ ،٦ ) = ٥٠ × ٠ + ٧٠ × ٦ = ٤٢٠ ديناراً

إن اكبر ربح عند (٠ ، ٦) . أى عليه أن لا يصنع سوى أحذية نساء . جرّب أخذ قيم أخرى لـــ س ، ص مثلاً (٢ ، ٤ ) ستجد أن :

ك = ٥٠ × ٢ + ٧٠ × ٤ = ٣٨٠ لتتحقق بأنه فعلاً الربح الأعلى هو ٤٢٠ ديناراً في الأسبوع .

**مثال (٣) :**

تنتج أحدى الشركات نوعين من الأثاثات نوع فاخر ونوع عادى . وكل من النوعين يلزم لانتاجه تشغيل ماكينتين أ ، ب . فلانتاج قطعة الأثاث من النوع الفاخر يلزم أن تعمل الماكينة أ لمدة ساعتين والماكينة ب لمدة ٤ ساعات . ولانتاج قطعة من الأثاث العادى يلزم أن تعمل الماكينة أ لمدة ٤ ساعات والماكينة ب لمدة ساعتين . وإذا كانت الشركة تنتج س من النوع الفاخر و ص من النوع العادى .

فما عدد القطع الفاخرة والعادية التي ينبغي على الشركة إنتاجها في اليوم حتى تضمن أكبر ربح إذا علم أن ربح الشركة من القطعة الفاخرة ٣ الف دينار وربحها من القطعة العادية ٢ ألف دينار .

**الحل :**

لاحظ أن عدد القطع من أي نوع لايكون سالباً

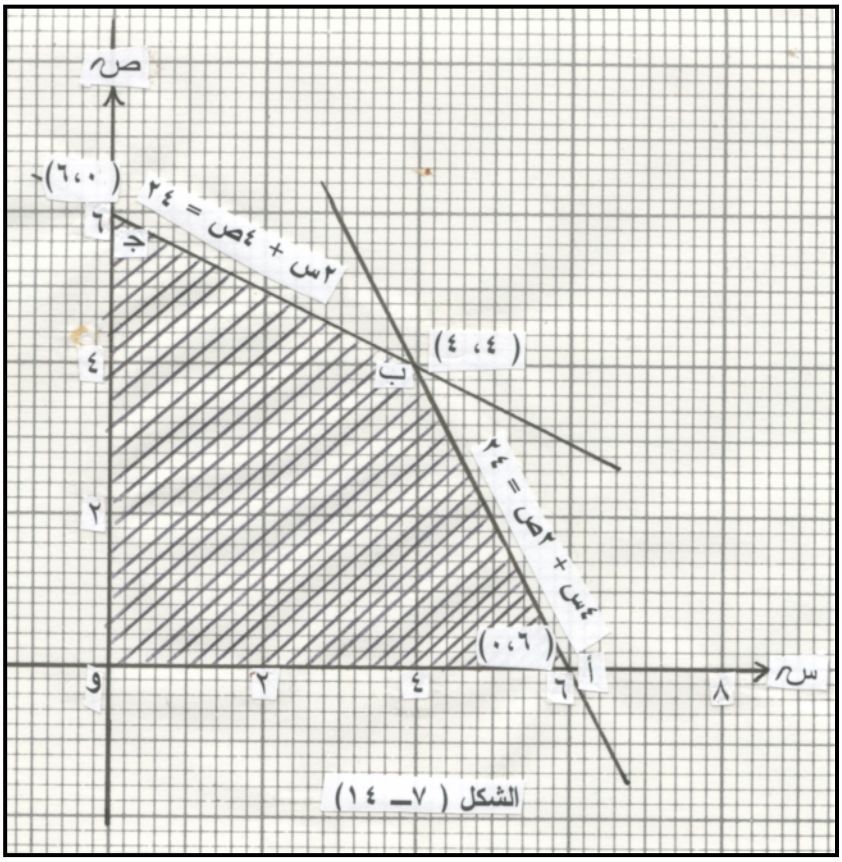
∴ س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠

وأن الما كينة أ يمكن استخدامها ٢٤ ساعة على الاكثر في اليوم وتعمل بمعدل ساعتين للقطعة الفاخرة و٤ ساعات لكل قطعة عادية .

∴ ٢ س + ٤ ص ≤ ٢٤

وكذلك الماكينة ب متباينتها ٤ س + ٢ص ≤ ٢٤ وتكون دالة الربح ٣س + ٢ ص = ك الشكل ( ٧ – ١٤ ) يوضح فضاء الحل : النقطة أ ( ٦ ، ٠) تعطى ربحا: (٦ × ٣ + ٠ × ٢) = ١٨ ألف دينار النقطة ب ( ٤ ، ٤ ) تعطى ربحاً : ٤ × ٣ + ٤ × ٢ = ٢٠ ألف دينار النقطة جـ ( ٠ ، ٦) تعطى ربحاً : ٠ × ٣ + ٦ × ٢= ١٢ ألف دينار .

وعلى هذا فإن النقطة ب تعطى أكبر ربح . وعلى هذا فإن افضل قرار للشركة هو انتاج ٤ قطع فاخرة و٤ قطع عادية يومياً .



الشكل ( ٧ـ ١٤)

تمرين (٧ – ٤)

(١) جد أكبر وأصغر قيمة للدوال الآتية بحيث تحقق المتباينات في كل مما يأتي :

( أ ) الدالة ك = س – ص بحيث

س ≤ ٢ ، ص ≤ ٣ ، ص + ٢ س ≥ ١٥

(ب) الدالة م = س + ص بحيث :

س ≤ ٢ ، ص ≤ ٣ ، ص + ٢ س ≥ ١٥ ، ص + ٢ س ≤ ١٢

( جـ) الدالة ر = س – ص بحيث

س $\leq$ ٠ ، ص $\leq$ ٠ ، س $\geq$ ٦ ، ص $\geq$ ٤ ، س + ص $\geq$ ٩ .

(د ) الدالة هـ = ٢ ص – س بحيث

س $\leq$ ٠ ، ص $\leq$ ٠ ، ص $\geq$ ٢ ، ص $\geq$ س ، س $\geq$ ٥ .

(٢) أراد أحمد أن يشتري بما لايزيد عن ١٨ ألف دينار كتباً أدبية وعلمية لمكتبته الخاصة . فإذا كان ثمن الكتاب الأدبي ألفى دينار وثمن الكتاب العلمى ٣ آلف دينار . وأن أحمد أراد أن يشتري أكثر من كتابين أدبيين ، واكثر من كتاب علمى واحد . فبكم طريقة يمكن أن يشترى أحمد الكتب . وما أكبر عدد يمكن شراؤه من هذه الكتب . وإذا أراد أحمد أن يدفع ١٨ ألف دينار بالضبط فما هي الطرق التى توافق ذلك ؟

(٣) يعمل في مصنع صغير للملابس الجاهزة عاملان وينتج هذا المصنع نوعين من الملابس . لأجل صنع قطعة واحدة من النوع الأول يعمل العامل الأول ساعة كاملة ويعمل العامل الثانى ساعتين ونصف . ولانتاج القطعة من النوع الثانى يلزم أن يعمل الأول ٤ ساعات والثاني ساعتين . فإذا كان العامل الأول لايعمل أكثر من ٨ ساعات والعامل الثاني لايعمل أكثر من ١٠ ساعات يومياً . وإذا كان ربح المصنع في القطعة الأولى ٦٠٠ دينار وفي الثانية ١٠٠٠ دينار أحسب العدد الذى يصنع في اليوم من كل نوع ليحصل على أكبر ربح يومى ؟

(٤) صاحب مصنع يريد شراء نوعين من الماكينات . الماكينة من النوع أ تحتاج إلى ثلاثة أمتار مربعة من أرض المصنع وسعرها ٢٠٠ ألف جنيه.الماكينة من النوع ب تحتاج إلى مترين من أرض المصنع وسعرها ٤٠٠ ألف جنيه . الأرض المخصصة من المصنع لتركيب الماكينات لا تزيد مساحتها عن ٤٠ متر مربع والمبلغ الذي رصده صاحب المصنع لشراء الماكينات لا يزيد عن ٤ ملايين من الجنيهات .

إذا كانت الماكينة من النوع أ تنتج ١٠٠ وحدة في الساعة ، والماكينة من النوع ب تنتج ١٥٠ وحدة في الساعة ، كم ماكينة يشتريها صاحب المصنع من كل نوع ليكون الإنتاج أكبر ما يمكن ؟

(٥) ينتج أحد المصانع نوعين من البضائع أ ، ب ويلزم لانتاج أي من هذين النوعين تشغيل ماكينتين .

فلانتاج قطعة من البضاعة أ يلزم أن تعمل الماكينة الاولى لمدة ساعة والماكينة الثانية لمدة ساعتين ونصف . ولإنتاج قطعة من البضاعة ب يلزم أن تعمل الماكينة الأولى لمدة ٤ ساعات والماكينة الثانية ساعتين . فإذا كانت الماكينة الأولى لايمكن أن تعمل أكثر من ٨ ساعات يومياً والثانية لايمكن أن تعمل أكثر من ١٢ ساعة يومياً . أرسم المنطقة التى تمثل هذه القيود .

(٦) يحتاج كيميائي إلى ١٠ ، ١٢ ، ١٢ وحدة من المواد الكيميائية أ ، ب ، ج على الترتيب . وهى متوفرة في نوعين سائل وبودرة . والسائل يحتوي على ٥ ، ٢ ، ١ وحدة في كل زجاجة على الترتيب . والبودرة تحتوي على ١ ، ٢ ، ٤ وحدة على الترتيب في كل علبة لكل مادة . فإذا كان ثمن زجاجة السائل ٩٠ ديناراً وثمن زجاجة البودرة ٦٠ ديناراً . فإذا اشترى س زجاجة و ص علبة . فكم يشتري من كل نوع ليكون ما يدفعه أقل ما يمكن ؟

(٧) يقوم مصنع بتصنيع حقائب يد وحقائب سفر وفقاً للجدول الآتي :

| | **الانتاج** | **تكلفة تصنيع الوحدة** | **الجلد المستخدم للوحدة** | **ثمن بيع الوحدة** |
|---|---|---|---|---|
| حقائب اليد | س | ٤٠ دينار | ٤ قدم$^2$ | ٨٠ دينار |
| حقائب السفر | ص | ٣٠ دينار | ٦ قدم$^2$ | ٨٥ دينار |

فإذا كانت اقصى تكلفة ٣٦٠ دينار وكمية الجلد المستخدم ٤٨ قدم٢ يومياً .

أ/ كوّن المتباينات للانتاج والتكلفة المالية وكمية الجلد ومثلها بيانياً .

ب/ جد الإنتاج من كل نوع الذى يحقق أكبر دخل يومى .

ج/ إذا كان ثمن القدم المربع من الجلد ٥ دنانير ، أحسب الربح الأقصى للمصنع.

**تذكر أن** :

١ /إذا كان س < ص ، أ أي عدد حقيقي ، يكون :

س + أ < ص + أ

٢ /إذا كان س < ص ، أ أي عدد حقيقي موجب ، يكون :

أ س < أ ص

٣ /إذا كان س < ص ، أ أي عدد حقيقي سالب ، يكون :

أ س > أ ص

٤ /إذا كان س ، ص ، ع أعداداً حقيقية وكان

س < ص ، ص < ع ، يكون

س < ع

٥/ | س | < أ يعنى أن :

− أ < س < أ

٦/ في حالة | س | > أ ، فإنه إما س > أ أو − س > أ

⇐ س > أ أو س < − أ

# الوحدة الثامنة :

# العمليات الثنائية

**أهداف الوحدة الثامنة**

بعد نهاية هذه الوحدة يتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن :

١ /يعرّف العملية الثنائية .
٢ /يكون جدول العملية الثنائية .
٣ /يجد عملية الضرب والجمع بمقياس ن.
٤ /يعرف خواص العمليات الثنائية.
٥ /يعرّف الزمرة في النظام الرياضي .

## الوحدة الثامنة
## العمليات الثنائية

**تمهيد:**

لقد تعرفت من دراسة الرياضيات فى مرحلة الاساس على مجموعات عددية مختلفة ولقد تعلمت بعض العمليات على هذه المجموعات منها الجمع والضرب والطرح والقسمة والرفع الى قوة والجذر ... الخ فلو تاملنا مثلا عملية الجمع على مجموعة الاعداد الطبيعية ط = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٣ ، ... } ولناخذ مثلا ٣ + ٧ = ١٠ . ان عملية الجمع هذه تقرن بكل زوج مرتب من الأعداد الطبيعية عدد واحد . فمثلا نقرن بالزوج المرتب ( ٣ ، ٧ ) العدد ١٠ . ونظرا لان عملية الجمع تتعلق دائما بزوج من الاعداد الطبيعية فاننا نصفها بأنها عملية ثنائية على المجموعة ط .

إن هناك عمليات ثنائية كثيرة تعمل على المجموعة ط . فهنالك الطرح والضرب والقسمة والرفع الى قوة ، ان كل هذه العمليات هى عمليات ثنائية على المجموعة ط . لان كلا منها بمثابة قاعدة نقرن وفقها بكل ثنائية من الاعداد عددا معينا . فالضرب قاعدة تمكننا ان نقرن بكل زوج مرتب ( س ، ص ) من ط × ط عدد نرمز له بالرمز س × ص تحدده قاعدة الضرب. إذن فالضرب فى الحقيقة ليس سوى تطبيق لـ ط × ط فى ط . قاعدة اقترانه هى قاعدة الضرب . وكذلك الجمع وغيره .

إن العملية الثنائية قد ناخذ اى رمز مثل * ، ٥ ، + ، − ، × ، ÷ ، .... وهى تربط كل زوج مرتب ( أ ، ب ) بعنصر اخر جـ ونكتب أ * ب = جـ ، أ ٥ ب = جـ ، ...

**(٨-١) تعريف :**

| |
|---|
| العملية الثنائية على المجموعة س هي تطبيق مجاله حاصل الضرب الديكارتي س × س ومجاله المقابل س |

ومن هذا التعريف نستنتج ان كلا من عمليتى الجمع والضرب على المجموعة ك هى تطبيق مجاله حاصل الضرب الديكارتي ك × ك ومجاله المقابل هو المجموعة ك .

ونعبر عن عملية الجمع على مجموعة الاعداد الصحيحة صـ بأنها عملية ثنائية على المجموعة صـ على النحو الآتي :

+ : صـ × صـ ← صـ

حيث + : ( س ، ص ) ← س + ص

وبالمثل يعبر عن عملية الضرب على المجموعة ك بأنها عملية ثنائية على ك بالاتى :

× : ك × ك ← ك حيث × : ( س ، ص ) ← س × ص = س ص

مثلا × ( ٤ ، ٥ ) ← ٢٠ أي ٤ × ٥ = ٢٠ ∈ ك

العملية * المعرفة أ * ب = أ$^{٢}$ + ب$^{٢}$ – ١ هي عملية ثنائية

العملية ∘ المعرفة بالعلاقة س ∘ ص = س + ٢ ص هي عملية ثنائية .

العملية ∇ المعرفة بالعلاقة أ ∇ ب = ٢ أ + ٣ ب هي عملية ثنائية

**مثال** : ( ١ )

إذا كانت * عملية ثنائية معرفة بالعلاقة أ * ب = ٢ ب – ٣ أ

جد ٢ * ٣

الحل : ٢ * ٣ = ٢×٣ –٣×٢

= ٠

## **تمرين** ( ٨ – ١ )

(١) اذا كانت العملية ∘ معرفة بالعلاقة أ ∘ ب = ٣ ب + أ$^{٢}$ – ١

جد –٣ ∘ ٢

(٢) اذا كانت * معرفه بالعلاقة أ * ب = ٣ – ٢ أ + ب

جد الآتي :

( أ ) ٢ * (– ٣) ( ب ) ٥ * ٤ ( ج ) –٢* ١

(٣) اذا كانت ⊗ عملية ثنائية على المجموعة ص معرفة على النحو الآتي : س⊗ ص = س٢ + ص٢ – س

جد : ( أ ) ٤ ⊗ ٣ ( ب ) ٣ ⊗ ٤ ( ج ) –٢ ⊗ (–٣)

(٤) جد جميع المجوعات الجزئية للمجموعة { أ ، ب } ثم أثبت أن عمليتي الاتحاد والتقاطع على مجموعة المجموعات الجزئية السابقة عمليتان ثنائيتان .

**(٨ – ٢ ) العمليات الداخلية : (الإغلاق)**

فى عمليات الضرب والجمع على مجموعة الأعداد الطبيعية ط نجد دائما أن الناتج عدد طبيعى ، اما فى عمليتى الطرح والقسمة فالناتج ليس دائما عددا طبيعيا فمثلا ٢ – ٦ = – ٤ ∉ ط ، ٢٥/٤ = ٦ ١/٤ ∉ ط .

للتمييز بين هاتين الحالتين نقول أن كلا من عمليات الجمع والضرب والرفع عملية داخلية على المجموعة ط ، أو نقول ان المجموعة ط مغلقة تحت أى من هذه العمليات الثلاث ، أما عمليتا الطرح والقسمة فنقول انهما ليستا عمليتين داخليتين على المجموعة ط أو نقول ان المجموعة ط ليست مغلقة تحت اى من هاتين العمليتين .أى أن العملية الداخلية على المجموعة ط تقرن بكل زوج مرتب من الاعداد الطبيعية عددا طبيعيا واحد ، وعلى هذا فإن هذه العملية ليست الا دالة ( تطبيق) مجاله حاصل الضرب الديكارتي ط × ط وهو الذي ناخذ منه الازواج المرتبة ، ومجاله المقابل هو المجموعة ط أي أن :

+ : ط × ط ← ط

إن معنى العملية الثنائية الداخلية وغير الداخلية على مجموعة الأعداد الطبيعية ، ينطبق على أي عملية ثنائية تعمل على عناصر أي مجموعة أخرى .

( ٨ – ٢ ) **تعريف** :

العملية الداخلية على مجموعة غير خالية س هي تطبيق مجاله س × س ومجاله المقابل س . وإذا رمزنا لعملية ثنائية على المجموعة س بالرمز * فإننا نكتب :

* : س × س ⟵ س

**مثال** : ( ١ )

خذ المجموعتين ز ( مجموعة الاعداد الزوجية ) ، ف ( مجموعة الاعداد الفردية). وضح ما اذا كانت عملية الجمع داخلية ام لا على أي منها

**الحل** :

∀ أ ، ب ∋ ز فان أ + ب ∋ ز

∴ المجموعة ز مغلقة تحت عملية الجمع ، لأن مجموع اى عددين زوجيين هو عدد زوجي وحيد . اما المجموعة ف فليست مغلقة تحت عملية الجمع ، لان مجموع أي عددين فرديين ليس فرديا .

**جدول العملية الثنائية** :

يمكن تمثيل العملية الثنائية على المجموعة س فى صورة جدول يسمى جدول العملية حيث نضع عناصر المجموعة س فى السطر العلوي وفى العمود الايمن ، ثم نضع ناتج اى زوج مرتب فى موضع تقاطع السطر الذى يبدا من اليمين بالمركبة الاولى من هذا الزوج والعمود الذي يبدأ من الاعلى بالمركبة الثانية .

**مثال** : ( ٢ )

لتكن لدينا س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ولنعرف العملية الثنائية ⊕ من س × س ← س بما يلى :

⊕ ( س ، ع ) ← س + ع عندما يكون س + ع ≤ ٤

( س ، ع ) ← س + ع – ٤ عندما يكون س + ع > ٤

وذلك مهما كانت س ، ع من س

كون جدول العملية ووضح هل ⊕ عملية ثنائية داخلية على س أم لا ؟

**الحل** :

إستنادا الى التعريف يكون :

١ ⊕ ١ = ٢ ، ١ ⊕ ٢ = ٣ ، ١ ⊕ ٤ = ٥ – ٤ = ١ ، ...

يمكن تمثيل هذه العملية فى الجدول ( ٨ – ١ ) التالي :

| ⊕ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|---|
| ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ١ |
| ٢ | ٣ | ٤ | ١ | ٢ |
| ٣ | ٤ | ١ | ٢ | ٣ |
| ٤ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |

جدول ( ٨ – ١ )

فإذا أردنا مثلا أن نعرف ٣ ⊕ ٢ فإننا ننظر فى السطر الذي يبـــدأ من اليمين بالعنصر ٣ وفى العمود الذي يبدأ من الأعلى بالعنصر ٢ وعند تقاطع هذا السطر بهذا العمود نجد المطلوب .

أي ٣ ⊕ ٢ = ١ وهكذا ٠٠٠

نلاحظ من الجدول ( ٨ – ١ ) أن العملية ⊕ داخلية على المجموعـــة س إذ أن جميع العناصر الواقعة فى الجدول الى اليسار من العمود الاول على اليمين والى الأسفل من السطر العلوي هي عناصر من س.

## مثال : ( ٣ )

إذا كان س = { أ ، ب ، جـ ، د } ادرس العمليتين ٥ ،* الموضحتين بالجدولين .

( ٨ – ٢ ) ، ( ٨ – ٣ ) من حيث أنهما داخليتين أم لا ؟

| ٥ | أ | ب | جـ | د |
|---|---|---|---|---|
| أ | أ | ب | جـ | د |
| ب | ب | جـ | د | أ |
| جـ | جـ | د | ب | أ |
| د | د | أ | ب | جـ |

الجدول ( ٨ – ٢ )

| * | أ | ب | جـ | د |
|---|---|---|---|---|
| أ | أ | ب | هـ | جـ |
| ب | د | جـ | أ | ب |
| جـ | ب | هـ | جـ | أ |
| د | ج | أ | ب | هـ |

جدول ( ٨ – ٣ )

**الحل :**

العملية ٥ داخلية لانه ∀ ل ، ك ∋ س فـإن ل ٥ ك ∋ س أمـا العملية * فهي غير داخلية لأن مثلا أ * جـ = هـ حيث هـ ∌ س .

## **تمرين** (٨ – ٢ )

لتكن ز = { ٠ ، ٢ ، ٤، ٠٠٠ }

ف = { ١ ، ٣ ، ٥ ٠٠٠ }

أدرس عملية الضرب على كل من المجموعتين ز ، ف من حيث كونها داخلية ام لا .

(١) أدرس عملية الجمع في مجموعة الاعداد الحقيقية من حيث كونها داخلية أم لا .

(٢) اذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ادرس العملية الموضحة بالجدول ( ٨ – ٤ ) التالي من حيث كونها داخلية أم غير داخلية .

| * | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|
| ١ | ١ | ٢ | ٣ |
| ٢ | ٢ | ٣ | ١ |
| ٣ | ٣ | ٢ | ١ |

جدول ( ٨ – ٤ )

(٤) أي من الجداول التالية يعبر عن عملية ثنائية داخلية علـــى المجموعـــة { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } .

| * | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|---|
| ٠ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |
| ١ | ١ | ٥ | ٣ | ٠ |
| ٢ | ٢ | ٠ | ١ | ٣ |
| ٣ | ٣ | ٠ | ٦ | ٢ |

جدول ( ٨ – ٥ )

| ٥ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|---|
| ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ |
| ١ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ |
| ٢ | ١ | ٢ | ٠ | ٠ |
| ٣ | ٢ | ٠ | ٠ | ١ |

جدول ( ٨ – ٦ )

| Δ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|---|
| ٠ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |
| ١ | ١ | ٢ | ٣ | ٠ |
| ٢ | ٢ | ٣ | ٠ | ١ |
| ٣ | ٣ | ٠ | ١ | ٢ |

( جدول ( ٨ – ٧ )

| ∇ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|---|
| ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ |
| ١ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ |
| ٢ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ |
| ٣ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ |

جدول ( ٣ – ٨ )

## ( ٨ – ٣ ) **البنية الجبرية والنظام الرياضي** :

إذا رمزنا لعملية داخلية على المجموعة س بالرمز * فإننا نكتب * :

س × س ← س .

ونقول حينئذ ان لدينا نظاما رياضيا ذا عملية ونرمز لهذا النظام بالزوج المرتب (س، * ) ودعنا عندما نشير الى عملية ثنائية لاحقا نقصد من ذلك أنها عملية ثنائية داخلية على المجموعة المعينة .

(٨ – ٣ ) **تعريف** :

| |
|---|
| نقول عن كل مجموعة غير خالية س مزودة بعملية ثنائية نرمز لها بـ * مثلا انها ذات بنية جبرية بعملية واحدة أو انها نظام رياضي بعملية واحدة وبشكل آخر أن النظام الرياضي ذا العملية الواحدة هو الزوج المرتب ( س ،، * ) الذي مركبته الاولى المجموعة غير الخالية س ، ومركبته الثانية العملية الثنائية * |

( ٨ – ٤ ) **تعريف** :

| |
|---|
| نقول عن كل مجموعة غير خالية مزودة بعمليتين * ، ٥ مثلا انها ذات بنية جبرية بعمليتين أو انها نظام رياضي ذو عمليتين .<br>وبشكل آخر ، أن النظام الرياضي ذو العمليتين هو الثلاثي المرتب ( س ، * ، ٥ ) .<br>يقال أن العملية ٥ تتوزع على<br>العملية * إذا كان لكل ثلاثة عناصر أ ،ب ، جـ من المجموعة يتحقق :<br>أ ٥ (ب* جـ) = (أ ٥ب) * ( أ ٥ جـ)<br>(ب* جـ) ٥أ = ( ب ٥أ )* (جـ ٥أ) |

إن جميع الامثلة التى مرت بنا هى امثلة على بنى جبرية بعملية واحدة .

أما إذا زودنا مثلا مجموعة الاعداد الطبيعية ط بعمليتي الجمـــع + الـــضرب × العاديتين فاننا نحصل على نظام رياضى ذى عمليتين هو ( ط ، × ، + ) .

**مثال : ( ١ )**

ليكن $\Delta$ رمزا للعملية التي تقرن بكل زوج مرتب من الاعداد الطبيعية القاسم المشترك الاعظم لها فمثلا :

١٢ $\Delta$ ٤ = ٤

١٠ $\Delta$ ٢٥ = ٥

١٣ $\Delta$ ١٣ = ١٣

١٢ $\Delta$ ١٧ = ١

من الواضح ان $\Delta$ عملية ثنائية علىط وينشأ لدينا نظام رياضـــي ذو عملية (ط ، $\Delta$) .

لاحظ ان $\Delta$ : ط × ط ← ط

**مثال : ( ٢ )**

لتكن ق مجموعة المجموعات الجزئية للمجموعة س ={ أ ، ب ، جـ }

أى أن ق = { { أ } ،{ ب } ،{ جــ } ،{ أ ، ب } ،{ أ ، جــ } ،{ ب ، جــ } ، { أ ، ب ، جـ } ، $\emptyset$ }

إن اتحاد أي زوج من عناصر ق ينتج عنــصرا وحيــدا فـــى ق ، فمــثلا { أ } $\cup$ { ب ، جـ } = { أ ، ب ، جـ } $\in$ ق

أي أن : $\forall$ هــ ، ع $\in$ ق فان : هـ $\cup$ ع $\in$ ق

أي أن $\cup$ : ق × ق ← ق

إذن عملية الاتحاد عملية ثنائية على ق ويكون لدينا النـــظام الرياضي ( ق ، $\cup$ )

**مثال (٣)**

إذا كانت سمجموعة جميع المجموعات الجزئية لمجموعة معينة فإننا نجــد أن النظام (س ، $\cup$ ، $\cap$) يحقق الآتي :

أولاً عملية الاتحاد : عملية الاتحاد تتوزع على عملية التقاطع $\cap$.

**ثانياً : عملية التقاطع ∩ تتوزع على عملية الاتحاد .**

مثال (٤) :

أثبت أن عملية القسمة لا تتوزع على عملية الجمع في مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

الحل :

حيث ١٢÷ (٤+٢) = ١٢ ÷ ٦ = ٢

بينما (١٢÷٤) + (١٢÷٢) = ٣+٦ = ٩

إذن عملية القسمة لا تتوزع على عملية الجمع .

**تمرين** (٨ – ٣ )

(١) اذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } اكتب بطريقة رصد العناصر مجموعـــة المجموعات الجزيئة ق للمجموعة س ادرس عمليـــة التقـــاطع علـــى المجموعة ق من حيث كونها نظام رياضي ام لا.

(٢) اذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٤ } ادرس العملية * الموضحة بالجدول ( ٨ – ٩ ) الاتى واثبت ان ( س ، * ) نظام رياضي .

| * | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|
| ٢ | ٢ | ٣ | ٤ |
| ٣ | ٣ | ٤ | ٢ |
| ٤ | ٤ | ٢ | ٣ |

الجدول ( ٨ – ٩ )

لتكن = { $٢^{٠}$ ، $٢^{١}$ ، $٢^{٢}$ ، $٢^{٣}$ ، ... } هى مجموعة القوى الـصحيحة الموجبة للعدد ٢ ، هل ( س ، × ) نظام رياضي .

(٣) إذا اعتبرنا النظام ذا العمليتين الثنائيتين ( ح ، + ، x) فأجب عما يأتي:

هل + تقبل التوزيع على x .

هل x تقبل التوزيع على + .

## ( ٨ – ٤ ) **الحساب ذوالمقياس :**

**أولا : الجمع بمقياس ن :**

**( ٨ – ٥ ) تعريف :**

لتكن م مجموعة من الاعداد الطبيعية . نقول ان عملية الجمع $\oplus$ معرفة على م بمقياس ن اذا توفر الشرط التالي :

$\forall$ أ ، ب $\in$ م

أ $\oplus$ ب = باقى قسمة ( أ + ب ) على ن

وحينما نكون م على الصورة { ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ن – ١ }

نرمز لها بالرمز م

فمثلا اذا كانت م = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

وعرفنا العملية $\oplus$ بمقياس ٥ فان

٠ $\oplus$ ٢ = باقى قسمة ( ٠ + ٢ ) على ٥ = ٢

١ $\oplus$ ٥ = باقى قسمة ( ١ + ٥ ) على ٥ = ١

٣ $\oplus$ ٢ = باقى قسمة ( ٣ + ٢ ) على ٥ = ٠

وبذا يتكون الجدول ( ٨ – ١٠ ) التالي :

| $\oplus$ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|---|---|
| ٠ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
| ١ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٠ |
| ٢ | ٢ | ٣ | ٤ | ٠ | ١ |
| ٣ | ٣ | ٤ | ٠ | ١ | ٢ |
| ٤ | ٤ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |

جدول ( ٨ – ١٠ )

مثل هذا الحساب يسمى الحساب بمقياس ن . وهو الذي نستخدمه في حساب الساعات حيث م = { ١ ، ٢ ، ... ، ١٢ } وحيث ن = ١٢ . فاذا

كانت الساعة الآن العاشرة فانه بعد ٧ ساعات من الآن تصبح الساعة ١٠ ⊕ ٧ = ٥ وبعد ١٠ ساعات تصبح ١٠ ⊕ ١٠ = ٨ وهكذا .

**مثال : ( ١ )**

إذا كان م = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } وعرفنا على م عملية الجمع بمقياس ٤ . كون جدول عملية الجمع هذه . هل هي عملية داخلية أم غير ذلك ؟

**الحل :**

الجدول ( ٨ – ١١ ) يوضح عملية الجمع بمقياس ٤

| ⊕ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|---|
| ٠ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |
| ١ | ١ | ٢ | ٣ | ٠ |
| ٢ | ٢ | ٣ | ٠ | ١ |
| ٣ | ٣ | ٠ | ١ | ٢ |

جدول ( ٨ – ١١ )

عملية الجمع بمقياس ٤ عملية داخلية على المجموعة م؛ لان حاصل جمع اى عنصرين فى م هو عنصر وحيد ينتمى إلى م . وينشا لدينا نظام رياضى ( م ، ⊕ ) .

**مثال : ( ٢ )**

إذا كانت س = { ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ } وعرفنا على س عملية الجمع بمقياس ٩ . فادرس هذه العملية من حيث كونها داخلية أم غير ذلك .

**الحل :**

الجدول ( ٨ – ١٢ ) يمثل العملية ⊕ على س

| ⊕ | ٠ | ٢ | ٤ | ٦ |
|---|---|---|---|---|
| ٠ | ٠ | ٢ | ٤ | ٦ |
| ٢ | ٢ | ٣ | ٦ | ٨ |
| ٤ | ٤ | ٦ | ٨ | ١ |
| ٦ | ٦ | ٨ | ١ | ٣ |

جدول ( ٨–١٢)

عملية الجمع هذه بمقياس ٩ ليست عملية داخلية على المجموعة س ، لأن ٢ ⊕ ٦ = ٨ ∌ س وايضا ٤ ⊕ ٦ = ∌ س

## تمرين ( ٨ – ٤ )

(١) إذا كانت هـ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ } . وعرفنا على هـ عملية الجمع بمقياس ١٠ . كون جدول هذه العملية وادرسها من حيث كونها داخلية أم غير ذلك .

(٢) إذا كان م = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } وعرفنا على م عملية الجمع بمقياس ٧ كون الجدول لهذه العملية ، هل هى عملية داخلية ؟

(٣) أدرس كلا من العمليات الآتية من حيث كونها داخلية أم غير داخلية على مجموعة الاعداد الطبيعية ط .

(أ ) العملة ∇ التى تقرن بكل عددين طبيعين المضاعف المشترك الأصغر لهما .

(ب ) العملية * حيث ∀ أ ، ب ∈ ط ، أ * ب = ٢ ( أ + ب )

(ج) العملية ○ حيث ∀ أ ، ب ∈ ط ، أ ○ ب = $\frac{١}{٢}$ ( أ + ب )

(٤) إذا كانت الساعة الآن ٩ كم تكون بعد ٨ ساعات من الآن ؟

## ( ٨ – ٥ ) ثانيا : الضرب بمقياس ن :

لتكن م مجموعة من الأعداد الطبيعية . نقول ان عملية الضرب ⊗ معرفة على م بمقياس ن اذا تحقق الشرط الآتي :

∀ أ ، ب ∈ م ، أ ⊗ ب = باقى قسمة أ × ب على ن فمثلا اذا كانت م = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } وعرفنا العملية ⊗ بمقياس ٥ فإن

١ ⊗ ٤ = باقي قسمة ١ × ٤ على ٥ = ٤

٢ ⊗ ٣ = باقي قسمة ٢ × ٣ على ٥ = ١

٣ ⊗ ٤ = باقي قسمة ٣ × ٤ على ٥ = ٢

ويمكن تكوين جدول لعملية الضرب كما هو موضح بالجدول (٨ – ١٣)

| ⊗ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|---|---|
| ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ |
| ١ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
| ٢ | ٠ | ٢ | ٤ | ١ | ٣ |
| ٣ | ٠ | ٣ | ١ | ٤ | ٢ |
| ٤ | ٠ | ٤ | ٣ | ٢ | ١ |

(جدول ٨–١٣)

**مثال :** ( ١ )

م = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣، ٤ ، ٥ ، ٦ } وعرفنا على م عملية الضرب بمقياس ٧ . كون جدول هذه العملية . ووضح ما إذا كانت داخلية على المجموعة م أم غير داخلية .

**الحل :**

جدول عملية الضرب على المجموعة م بمقياس ٧ يمثلها الجدول (٨ – ١)

| ⊗ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ |
| ١ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ |
| ٢ | ٠ | ٢ | ٤ | ٦ | ١ | ٣ | ٥ |
| ٣ | ٠ | ٣ | ٦ | ٢ | ٥ | ١ | ٤ |
| ٤ | ٠ | ٤ | ١ | ٥ | ٢ | ٦ | ٣ |
| ٥ | ٠ | ٥ | ٣ | ١ | ٦ | ٤ | ٢ |
| ٦ | ٠ | ٦ | ٥ | ٤ | ٣ | ٢ | ١ |

جدول ( ٨ – ١٤ )

هذه العملية داخلية لان :

∀ أ ، ب ∋ $م_٧$ ، أ ⊗ ب ∋ $م_٧$

## تمرين ( ٨ – ٥ )

(١) كون جدول العمليات التالية

( أ ) $م_٦$ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } وعرفنا على $م_٦$ عملية الضرب بمقياس ٦ .

( ب) م ={٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨} وعرفنا على م عملية الضرب بمقياس ٨

( ج) $م_{١٢}$ ={ ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ١٢ } وعرفنا على $م_{١٢}$ عملية الضرب بمقياس ١٢ .

(٢) إذا كان $م_٨$ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، .. ، ٧ } وعرفنا على $م_٨$ عمليتي الجمع

$\oplus$ والضرب .

$\otimes$ بمقياس ٨ . أي هاتين العمليتين داخلية على $م_٨$ .

### (٨ – ٦ ) خواص العملية الثنائية فى النظام الرياضي :

هنالك خواص قد تتمتع بها بعض الانظمة ولا يتمتع بها بعضها الأخر . والخواص التي سنذكرها سبق للطالب معرفة مفهومها وسنوردها من أجل المزيد من الامثلة والايضاحات .

ملاحظة : حين نذكر كلمة نظام نقصد به نظاما رياضيا ذا عملية .

**أولاً : الخاصة الابدالية :**

(٨ - ٦) **تعريف** :

| |
|---|
| يقال للنظام ( س ، * ) إنه نظام إبدالى إذا وفقط إذا توفر الشرط التالى : |
| $\forall$ أ ، ب $\ni$ س : أ * ب = ب * أ |
| أو نقول عن عملية ثنائية * على مجموعة س انها تبديلية فيما اذا كان أ * ب = ب * أ |
| $\forall$ أ ، ب $\ni$ س |

يمكن للطالب أن يتحقق بسهولة ان عملية الجمع على مجموعة الأعداد الصحيحة عملية تبديلية لان أ + ب = ب + أ ، $\forall$ أ ، ب $\ni$ صـ .

وأن عملية الضرب على مجموعة الأعـــداد الحقيقيـــة عمليـــة تبديليـــة لأنـــه
أ × ب = ب × أ ، ∀ أ ، ب ∋ ح .

أما عملية القسمة على مجموعـــة الأعـــداد ح* = ( ح − { ٠ } )
ليست تبديلية مثلا ٥ ÷ ٦ ≠ ٦ ÷ ٥ .

أما كل من عمليتي الاتحاد والتقاطع على المجموعات تبديلية حيث :

أ ∪ ب = ب ∪ أ

أ ∩ ب = ب ∩ أ

إن عملية الرفع الى القوة على ط ليست تبديلية لأنـــه إذا رمزنـــا لهـــذه العملية ب فإن :

س ع = س $^{ع}$ ، ∀ س ، ع ∋ ط

فمن الواضح مثلا ان

٣ ٢ = ٣$^{٢}$ = ٩

٢ ٣ = ٢$^{٣}$ = ٨

وبالتالي ٣ ٢ ≠ ٢ ٣

**ملاحظة** :

(١) إذا وجد عنصران أ ، ب من س يحققـــان أ * ب = ب * أ فهـــذا لا يكفى كي تكون * تبديلية لان شرط الابدال ينبغي أن يتحقق مهمـــا كانـــت ( أ ، ب ) من س × س وليس من أجل بعض الازواج فقط . بل يكفى أن يوجد زوج واحد من س × س لا يحقق شرط الإبدال كي لا تكون العملية تبديلية .

(٢) إذا أعطيت العملية المعرفة على مجموعة بجدول فعندئذ يلزم ويكفي كي تكون هذه العملية تبديلية هو أن يكون كل عنصرين متناظرين بالنسبة لقطر الجدول الرئيسي ( الممتد من الزاوية العليا اليمنى الـــى الزاويـــة الـــسفلى اليسرى) متساويين .

## تمرين ( ٨ – ٦ )

(١) لتكن $\Theta$ عملية ثنائية على ط معرفة بالقاعدة
س $\Theta$ ص = س٢ + ص٢
هل هذه العملية تبديلية ؟

(٢) برهن أن العملية الثنائية $\triangle$ على المجموعة س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }
الممثلة بالجدول ( ٨ – ١٥ ) التالى تبديلية .

| $\triangle$ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|---|
| ١ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
| ٢ | ٢ | ٣ | ٤ | ١ |
| ٣ | ٣ | ٤ | ١ | ٢ |
| ٤ | ٤ | ١ | ٢ | ٣ |

جدول ( ٨ – ١٥ )

أكمل الفراغ فى الجدول ( ٨ – ١٦ ) الآتى حيث تكون العملية الثنائية * على المجموعة { أ ، ب ، جـ } إبدالية

| * | أ | ب | أ |
|---|---|---|---|
| أ | أ | ب | جـ |
| ب | | أ | |
| جـ | | | أ |

جدول ( ٨ – ١٦ )

(٣) اذا كانت $\otimes$ عملية ثنائية معرفة على المجموعة ص على النحو الآتي :
س $\otimes$ ص = ( س – ص )$^{٢}$
هل هذه العملية تبديلية ؟

**( ٨ – ٧ ) ثانيا : الخاصية التجميعية ( الدمج )**

بدراسة عمليتي الجمع والضرب على المجموعة ط نلاحظ أن :

( ٧ + ٢ ) + ٥ = ٧ + ( ٢ + ٥ ) = ١٤

( ٧ × ٢ ) × ٥ = ٧ × ( ٢ × ٥ ) = ٧٠

تسمى هذه الخاصية خاصية التجميع ( الدمج ) وهي صحيحة لكل ثلاثه أعداد من المجموعة ط . أي أن :

( أ + ب ) + جـ = أ + (ب + جـ )

( أ × ب ) × جـ = أ × (ب × جـ )

وعلى وجه العموم نكتب التعريف الآتي :

( ٨ – ٧ ) **تعريف** :

يقال للنظام ( س ، * ) إنه نظام تجميعي إذا وفقط إذا توفر الشرط الآتي :

$\forall$ أ ، ب ، جـ $\in$ س فان :

( أ * ب ) * جـ = أ * ( ب * جـ )

أو :

نقول عن عملية * على مجموعة س أنها تجميعية إذا كان ( أ * ب ) * جـ = أ * ( ب * جـ )

$\forall$ أ ، ب ، جـ $\in$ س .

**أمثلة** : إن كلا من عمليتي الجمع والضرب على مجموعات الأعداد ط ، ك، ص ، ن ، ح كما نعلم تجميعية اما عمليتي الطرح والقسمة فليست تجميعية .

**فمثلا** : ٤ – ( ٢ – ٣ ) $\neq$ ( ٤ – ٢ ) – ٣

فالطرف الايمن يساوي ٥ فى حين ان الطرف الايسر –١ وكذلك

٣ ÷ ( ٤ ÷ ١/٢ ) $\neq$ ( ٣ ÷ ٤ ) ÷ ١/٢

فالطرف الايمن يساوي ٣/٨ فى حين يساوي الطرف الايسر ٣/٢

**مثال** : ( ١ )

لنفرض العملية ⊗ على المجموعة ص على النحو الآتي :

أ ⊗ ب = أ + ب – ٣

أثبت ان ⊗ عملية تجميعية .

**الحل** :

لكي تكون ⊗ تجميعية يجب ان يتحقق الشرط التالي :

( أ ⊗ ب ) ⊗ جـ = أ ⊗ ( ب ⊗ جـ )

**الطرف الايمن** = ( أ ⊗ ب ) ⊗ جـ

= ( أ + ب – ٣ ) ⊗ جـ

= أ + ب – ٣ + جـ – ٣ = أ + ب + جـ – ٦

**الطرف الايسر** = أ ⊗ ( ب ⊗ جـ )

= أ ⊗ ( ب + جـ – ٣ )

= أ + ب + جـ – ٣ – ٣ = أ + ب + جـ – ٦

ومن ذلك نستنتج أن العملية الثنائية ⊗ تجميعية .

**مثال** : ( ٢ )

إذا كانت * معرفة على المجموعة ك على النحو التالي :

أ * ب = ٢أ + ٣ب

أثبت أن هذه العملية غير تجميعية .

**الحل** :

( أ * ب ) * جـ = ( ٢ أ + ٣ ب ) * جـ

= ٢ ( ٢ أ + ٣ ب ) + ٣ جـ

= ٤ أ + ٦ ب + ٣ جـ

أ * ( ب * جـ ) = أ * ( ٢ ب + ٣ جـ)
=٢ أ + ٣ ( ٢ ب + ٣ جـ )
= ٢ أ + ٦ ب + ٩ جـ
ومن الواضح ان :
( أ * ب ) * جـ ≠ أ * ( ب * جـ )
وعليه فالعملية * غير تجميعية .

**ملاحظة** :

إذا كان لدينا النظام ( س ، * ) وكان نظاما تجميعيا
علمنا ان : ( س * ص ) * ع = س * ( ص * ع )
∀ س ، ص ، ع ∍ س

أي أن النتيجة لا تتاثر سواء بدانا في الحساب ( س * ص ) ثم ( س * ص ) * ع او بدانا فى الحساب ( ص * ع ) ثم س * ( ص * ع ) . لذا فلا باس فى مثل هذه الحالة من حذف الاقواس والاكتفاء بالكتابة س * ص * ع . غير أن ذلك غير مسموح به عندما تكون العملية * غير تجميعية .

## **تمرين** ( ٨ – ٧ )

(١) لتكن ٥ عملية ثنائية معرفة على ط كما يأتي
س ٥ ع = س٢ + ع ، ∀ س ، ع ∍ ط
هل هذه العملية تجميعية ؟

(٢) برهن ان العملية * المعرفة على مجموعة الاعداد الحقيقية ح بالقاعدة :
س * ص = س + ص – س ص ، ∀ س ، ص ∍ ح تجميعية .

(٣) لتكن س = { ب ، جـ ، د } ولنعرف عليها عملية ثنائية تبديلية T فيما ياتى :
ب T ب = ب ، جـ T جـ = جـ ، د T د = د ، جـT د = د T جـ =ب
د T ب = ب T د = جـ ، ب T جـ = جـ T ب = د
أكتب جدول هذه العملية واثبت انها ليست تجميعية

(٤) لتكن © عملية ثنائية معرفة على المجموعة ط على النحو الآتي:

أ © ب = أ ( أ + ب )

جد قيمة ٣ © (٤ © ٢ ) ، ( ٣ © ٤ ) © ٢ ،

(٥ © ٣ ) © ( ٢ © ٤)

هل العملية الثنائية © ابدالية ؟ تجميعية ؟

## ( ٨ - ٨ ) **ثالثا** : **العنصر المحايد** :

بدراسة عمليتى الجمع والضرب على المجموعة ص ، وجدنا أنه

∀ أ ∋ ص يكون :

أ + ٠ = ٠ + أ = أ

أ × ١ = ١ × أ = أ

أي أنه بجمع الصفر مع العدد أ فان قيمة الناتج يكون أ . وكذلك بضرب الواحد الصحيح فى العدد أ يكون الناتج أ . ولهذا فان الصفر يسمى عنصرا محايدا لعملية الجمع ، كما يسمى الواحد عنصرا محايدا لعملية الضرب . ويمكن تعميم المفهوم بالتعريف التالي :

(٨ - ٨ ) **تعريف** :

العنصر مـ في المجموعة س المعرفة عليها عملية ثنائية * يسمى عنصرا محايدا بالنسبة لهذه العملية اذا كان

أ * مـ = مـ * أ = أ ∀ أ ∋ س

او

يقال للنظام ( س ، * ) انه يمتلك عنصرا محايدا اذا وفقط اذا وجد عنصر مـ ∋ س بحيث

∀ أ ∋ س ، أ * مـ = مـ * أ = أ

إن المجموعة الخالية ∅ عنصر محايد لعملية الاتحاد ∪ المعرفة على مجموعة اجزاء مجموعة س وذلك لأن :

∅ ∪ $س_١$ = $س_١$ ∪ ∅ = $س_١$ مهما كانت المجموعة الجزئية $س_١$ من س

وأن المجموعة الشاملة ش هى عنصر محايد لعملية التقاطع ∩ المعرفة على مجموعة اجزاء مجموعة س وذلك لأن :

ش ∩ $س_١$ = $س_١$ ∩ ش = $س_١$

**مثال : (١)**

إذا كانت $م_٤$ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } وعرفنا على $م_٤$ عمليتي الجمع والضرب بمقياس ٤ . فابحث عن العنصر المحايد فى كل من النظامين ($م_٤$ ، ⊕ ) ، ($م_٤$ ، ⊗ ) .

**الحل**

الجدول ( ٨ – ١٧ ) يمثل العملية ⊕ والجدول ( ٨ – ١٨ ) يمثل العملية ⊗

| ⊕ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|---|
| ٠ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |
| ١ | ١ | ٢ | ٣ | ٠ |
| ٢ | ٢ | ٣ | ٠ | ١ |
| ٣ | ٣ | ٠ | ١ | ٢ |

جدول ( ٨ – ١٧ )

| ⊗ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|---|
| ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ |
| ١ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |
| ٢ | ٠ | ٢ | ٠ | ٢ |
| ٣ | ٠ | ٣ | ٢ | ١ |

جدول ( ٨ – ١٨ )

بالنسبة للنظام ($م_٤$ ، ⊕ ) نجد أن الصفر هو العنصر المحايد . وهو العنصر الواقع عند تقاطع الصف والعمود الذين يحملان عناصر $م_٤$ بنفس ترتيب الصف الواقع يسار الرمز ⊕ والعمود الواقع أسفل الرمز ⊕ تماماً .
بالنسبة للنظام ( $م_٤$ ، ⊗ ) نجد ان العنصر المحايد هو الواحد . انظر الصف المظلل والعمود المظلل من كل جدول .

**ملاحظة** :

١. اذا وجد عنصران أ ، ب من س بحيث يكــون أ * ب = ب * أ = أ فهذا لا يعنى أن ب عنصر محايد لأن الشرط ينبغى أن يتحقق مهما كانت أ من س وليس من اجل بعض عناصرها .

٢. إذا كانت العملية * تبديلية فعندئذ يكفى ان يكون عنصر مـــ من س محايدا للعملية * ان يتحقق الشرط س * مـــ = س ، ∀ س ∋ س

أو الشرط مـــ * س = س ، ∀ س ∋ س

**مثال** : ( ٢ )

إذا عرفنا على ح عملية ثنائية * على النحو التالى :

س * ص = س + ص – ٢

ما العنصر المحايد لهذه العملية

**الحل** :

بفرض ان مـــ العنصر المحايد ، ∴ س * مـــ = س

∴ س + مـــ –٢ = س ∀ س ∋ س

∴ مـــ –٢ = ٠

∴ مـــ = ٢

∴ العنصر المحايد للعملية * هو مـــ = ٢

**نظرية ( ٨ – ١ ) :**

**لا يمكن ان يكون فى مجموعة س معرف عليها عملية * اكثر من عنصر محايد واحد لـــ ***

**البرهان** :

نفرض ان فى المجموعة س عنصرين محايدين مـ ، مـ̄

فعندئذ مـ * س = س * مـ ∀س ∋ س

مـ̄ * س = س * مـ̄ = س ∀ س ∋ س

وبما أن $م^-$ عنصر من س ، فينبغى أن يتحقق الشرط الأول عندما نضع فيه $م^-$ بدلا عن س أي ينبغى أن يكون

$م * م^- = م^-$

كذلك بما أن م عنصر من س ، فإن الشرط الثانى يوضح م بدلا عن س أي $م * م^- = م$

إذن $م = م^-$ وهو المطلوب .

## **تمرين** ( ٨ – ٨ )

(١) اذا عرفنا على ط عملية ثنائية ٥ كما يلي :

س ٥ ص = س ، $\forall$ س ، ص $\ni$ ط

فهل لهذه العملية عنصر محايد ؟ وما هو ان وجد ؟

(٢) ما العنصر المحايد فى النظام ($م_{١٢}$ ، $\oplus$ )

حيث $م_{١٢}$ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ١٢ } ؟

س $\oplus$ ص = س + ص اذا كان س + ص $\leq$ ١٢

س + ص – ١٢ اذا كان س + ص > ١٢

(٣) جد العنصر المحايد بالنسبة للعملية * المعرفة على مجموعة الاعداد الكليه ك كما يلي :

أ * ب = أ + ب + أ ب

## ( ٨ – ٩ ) **رابعاً** : **العناصر المتناظرة** :

إذا كانت * عملية ثنائية على المجموعة س ، م عنصر محايد وكان $\forall$ أ $\ni$ س يوجد $\bar{أ}$ $\ni$ س بحيث

أ * $\bar{أ}$ = $\bar{أ}$ * أ = م

عندها يسمى العنصر $\bar{أ}$ نظير العنصر أ .

أحيانا يستعمل الرمز $أ^{-١}$ للدلالة على العنصر النظير فمثلا فى عملية الجمع على مجموعة الاعداد الصحيحة يوجد لكل عنصر نظير ويوجد عنصر محايد هو الصفر

حيث أ + $\bar{أ}$ = ٠ $\Leftarrow$ $\bar{أ}$ = – أ

أي $\forall$ أ $\in$ ص فإن – أ $\in$ ص هو نظير أ ، بالنسبة لعملية الجمع على مجموعة الاعداد الكلية يوجد عنصر محايد هو الصفر ولكن لا يوجد نظير لكل عنصر حيث ١ + (–١) = ٠ $\Leftarrow$ –أ = –١

لكن –١ $\notin$ ك

$\therefore$ لا يوجد نظير للعدد ١

( ٨ – ٩ ) **تعريف** :

| |
|---|
| ليكن (س ، * ) نظاما رياضيا ويمتلك عنصراً محايدا مـ ، وليكن أ ، ب $\in$ س . يقال ان أ نظير ب ( أ و ب نظير أ ) اذا وفقط اذا كان أ * ب = مـ ، ب * أ = مـ<br>أو نقول عن عنصرين أ ، ب من مجموعة س مزودة بعملية ثنائية * ذات عنصر محايد مـ أنهما متناظران اذا كان<br>أ * ب = ب * أ = مـ |

ونقول فى هذه الحالة عن كل من العنصرين أ ، ب انه نظير الاخر بالنسبة لـ * .

**ملاحظة** :

إذا لم يكن فى النظام ( س ، * ) عنصر محايد فلا معنى للبحث عن نظير أي عنصر من عناصر س .

**مثال** : ( ١ )

إذا كانت المجموعة س = { أ ، ب ، جـ }

وعرفت العملية * كما هو موضح فى الجدول ( ٨ – ١٩ ) التالى :

| * | أ | ب | جـ |
|---|---|---|---|
| أ | جـ | أ | ب |
| ب | أ | ب | جـ |
| جـ | ب | جـ | أ |

جدول ( ٨ – ١٩ )

أدرس الجدول (٨- ١٩ ) ثم أجب عن الآتى :

١. هل ( س ، * ) نظام رياضى ؟
٢. جد العنصر المحايد للعملية * على س
٣. جد نظائر العناصر أ ، ب ، جـ

**الحل**

١. ( س ، * ) نظام رياضي لأن ∀ ل ، ك ∋ س
ل * ك ∋ س
٢. العنصر المحايد هو ب .
٣.

| العنصر | أ | ب | جـ |
|---|---|---|---|
| النظير | جـ | ب | أ |

**مثال : ( ٢ )**

إذا كان ص٥ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } وعرفنا على ص٥ عمليتى الجمـــع والضرب بمقياس ٥ فابحث عن العنصر المحايد والنظائر فى كل من النظامين (ص٥ ، ⊕) (ص٥ ، ⊗)

**الحل**

نكون أولا جدولي العمليتين كما يلي :

| ⊕ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|---|---|
| ٠ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
| ١ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٠ |
| ٢ | ٢ | ٣ | ٤ | ٠ | ١ |
| ٣ | ٣ | ٤ | ٠ | ١ | ٢ |
| ٤ | ٤ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |

جدول ( ٨ - ٢٠ )

| ⊗ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|---|---|
| ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ |
| ١ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
| ٢ | ٠ | ٢ | ٤ | ١ | ٣ |
| ٣ | ٠ | ٣ | ١ | ٤ | ٢ |
| ٤ | ٠ | ٤ | ٣ | ٢ | ١ |

جدول ( ٨- ٢١ )

( أ ) بالنسبة للنظام (م٥ ، ⊕ ) الممثل بالجدول ( ٨ - ٢٠)
العنصر المحايد هو الصفر
ونجد ان لكل عنصر نظير كما يلي :
العنصر : ٠ ١ ٢ ٣ ٤
النظير : ٠ ٤ ٣ ٢ ١

(ب ) بالنسبة للنظام (م٥ ، ⊗ ) الممثل بالجدول ( ٣ - ٢١ )
العنصر المحايد هو الواحد
لكل عنصر نظير فى م٥ ما عدا الصفر وهي كما يلي
العنصر : ١ ٢ ٣ ٤
النظير : ١ ٣ ٢ ٤

**مثال** : ( ٣ )

فى العملية * المعرفة على ح على النحو التالي

س * ص = س + ص - ٢

وجدنا فى مثال سابق ان العنصر المحايد لها هو مـــ = ٢ اوجد نظيـــر العنصر س .

**الحل** :

إذا رمزنا لهذا النظير بالرمز س‾ فعندئذ ينبغي أن يكون

س * س‾ = س‾ * س = ٢

أي س + س‾ - ٢ = ٢

س‾ = ٤ - س

وبما ان س عدد حقيقي فان س$^{-}$ = ٤ – س عدد حقيقي كذلك فهـــو نظير س .

**نظرية** ( ٨ – ٢ ):

> لا يمكن أن يكون أكثر من نظير واحد لأي عنصر فى النظام التجميعي ( س ، * ) ذى العنصر المحايد مـ .

**البرهان** :

لنفرض ان للعنصر س نظيـــرين س$^{-}$ ، س$^{=}$ فعندئـــذ اســـتنادا الـــى التعريف يكون :

س * س$^{-}$ = س$^{-}$ * س = مـ ( ١ )

س * س$^{=}$ = س$^{=}$ * س = مـ ( ٢ )

إذن . س$^{-}$ = س$^{-}$ * مـ لان مـــ عنصر محايد

= س$^{-}$ * ( س * س$^{=}$ ) إعتمادا على ( ٢ )

= (س$^{-}$ * س ) * س$^{=}$ لان * تجميعية

= مـ ٥ س$^{=}$ إعتمادا على ( ١ )

= س$^{=}$ لان مـ عنصر محايد

**تمرين** ( ٨ – ٩ )

(١) اذا كانت المجموعة س = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } وعرفت العملية ٥ كما هو موضح بالجدول ( ٨ – ٢٢ ) الآتي :

| ٥ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|---|
| ٠ | ٣ | ١ | ٠ | ٢ |
| ١ | ٢ | ٣ | ١ | ٠ |
| ٢ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |
| ٣ | ٠ | ٢ | ٣ | ١ |

جدول ( ٨ – ٢٢ )

ادرس الجدول ( ٨ – ٢٢ ) ثم اجب عن الآتي :

( أ ) هل ( س ، ٥ ) نظام ؟

( ب ) جد العنصر المحايد للعملية ٥ على س .

( ج ) جد نظائر العناصر ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣

(٢) أذا كانت المجموعة م٦ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } وعرفنا م٦ عملية الجمع بمقياس ٦ فابحث عن العنصر المحايد والنظائر فى النظام (م٦ ، ⊕ ) .

(٣) اذا كانت م٦ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } وعرفنا على م٥ عملية الضرب بمقياس ٥ . كون جدول هذه العملية ثم اجب عن الآتي .

( أ ) هل النظام (م٥ ، ⊗) ابدالي

( ب ) هل النظام (م٥ ، ⊗) تجميعي

( ج ) ما العنصر المحايد فى هذا النظام

( د ) اكتب نظير كل من العناصر ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

(٤) لنعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية ح عملية ثنائية * كما يلى :

س * ص = س + ص – س ص

أثبت أن لـ * عنصرا محايدا فى ح وأوجده ، هل يوجد لكل عنصر فى ح نظير ، وما هو فى حالة وجوده ؟

(٥) هل يوجد لكل مجموعة جزئية من المجموعة س نظير اذا زودنا مجموعة اجزاء س بعملية الاتحاد .

(٦) لتكن س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ولنعرف على س عملية ثنائية كما يلي :

س ص = أكبر العددين س وص اذا كانا مختلفين واحدهما ان كانا متساويين .

هل تجميعية ، وهل لها عنصر محايد ؟ وما هو اذا كان موجوداً ؟ وما العناصر المتناظرة حينئذ ؟

**( ٨ – ١٠) الزمرة**

إذا تاملنا الامثلة التى مرت بنا عن الأنظمة الرياضية فاننا نرى ان هذه الأنظمة قد تتمتع ببعض الخواص وتتمايز هذه الانظمة عن بعضها بالخواص التي تتمتع بها وبعدد عملياتها . ومن أهم الانظمة الرياضية ذات العملية الواحدة هي تلك التى ندعوها زمرة .

( ٨ – ١٠ ) **تعريف** :

| |
|---|
| إذا كانت س مجموعة غير خالية ، وكانت * عملية على س فان النظام الرياضى ( س ، * ) يكون زمرة إذا تحققت الشروط التالية : |
| (١) أن تكون * عملية ثنائية داخلية . |
| (٢) أن تكون * تجميعية ، أي أنه $\forall$ س ، ص ، ع $\ni$ س فإن س * ( ص * ع ) = ( س * ص ) * ع |
| (٣) أن تكون ذات عنصر محايد مـ ، أي $\forall$ س $\ni$ س فان مـ * س = س * مـ = س |
| (٤) أن يكون لكل عنصر س من س نظير س/ بالنسبة لـ * أي أن س * س/ = س/ * س = مـ |

**ملاحظات :**

(١) فى كثير من الاحيان بدلا من قولنا ان ( س ، * ) زمرة نقول ان س زمرة بالنسبة الى * أو نقول اختصارا ان س زمرة اذا لم يكن هنالك مجال للالتباس .

(٢) إذا كانت العملية * تبديلية بالإضافة إلى الشروط الأربعة الواردة فى التعريف فاننا نقول عن الزمرة انها زمرة تبدلية .

(٣) إذا رمزنا لعملية الزمرة بالرمز + ( دون أن تكون هذه العملية بالضرورة عملية الجمع العادى ) فإننا نصف هذه الزمرة بأنها زمرة جمعية ونرمز فى هذه الحالة للعنصر المحايد بالرمز ( ٠ ) أما إذا رمزنا لعملية الزمرة بـ ( × ) أو ( ٠ ) ( دون أن تكون هذه العملية بالضرورة عملية الضرب العادي ) فإننا نصف الزمرة بانها زمرة ضربية ونرمز لعنصرها المحايد بـ ( ١ ) .

**أمثلة** :

إن النظام ( ص ، + ) يشكل زمرة إبدالية حيث ص مجموعة الاعداد الصحيحة . عنصرها المحايد هو الصفر ونظير كل عنصر س من ص هو – س . وكذلك النظام ( ح ، + ) وان ( ح* ، × ) زمرة حيث ح* = ح – { ٠ }

و × عملية الضرب العادى . العنصر المحايد لهذه الزمرة هو ١ ونظير كل عنصر من ح* هو مقلوبه .

ولكن ( ط ، × ) ، ( ط ، + ) ، ليستا زمرتين . لماذا ؟

**مثال** : ( ١ )

لنعرف على المجموعة س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ }

العملية ⊕ كما يلي :

س ⊕ ص = س + ص إذا كان س + ص ≤ ٧

س ⊕ ص = س + ص – ٧ إذا كان س + ص > ٧

أثبت إن النظام ( س ، ⊕ ) زمرة تبديلية

**الحل** :

نكون جدول العملية أولاً كما في الجدول ( 8 – ٢٣ )

| ⊕ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ١ |
| ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ١ | ٢ |
| ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ١ | ٢ | ٣ |
| ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
| ٥ | ٦ | ٧ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ |
| ٦ | ٧ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ |
| ٧ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ |

جدول (٨– ٢٣ )

نلاحظ من هذا الجدول مباشرة ما يلي :

١. ان العملية ⊕ ثنائية داخلية لان س ⊕ ص هو دائما ، احد عناصر س
٢. العملية ⊕ تجميعية لانه اذا كان س + ص + ع ≥ ٧
فان س ⊕ ص ≥ ٧ ، ص ⊕ ع ≥ ٧
وبالتالى فان س ⊕ ( ص ⊕ ع ) = س ⊕ ( ص + ع )
= س + ص + ع
( س ⊕ ص ) ⊕ ع = ( س + ص ) ⊕ ع = س + ص + ع
∴ ( س ⊕ ص ) ⊕ ع = س ⊕ ( ص ⊕ ع )
أما اذا كان ٧ < س + ص + ع < ١٤ فانه اما ان يكون ص + ع ≥ ٧
وبالتالى س ⊕ (ص ⊕ ع ) = س ⊕ ( ص + ع )
= س + ص + ع – ٧ لان س + ص + ع – ٧ ≥ ٧
او يكون ١٤ ≤ ص + ع > ٧
وبالتالى : س ⊕ ( ص ⊕ع ) = س ⊕ ( ص+ ع – ٧ )
= س + ص + ع – ٧
وللحصول على ( س ⊕ ص ) ⊕ ع نميز ايضا بين الحالتين
( س + ص ≥ ٧ و ١٤ ≤ س + ص > ٧ )
فنجد ايضا ان ( س ⊕ ص ) ⊕ ع = س + ص + ع
أو ( س ⊕ ص ) ⊕ ع = س + ص + ع – ٧
مما يوضح ان ⊕ تجميعية .
٣. من الواضح ان ٧ عنصر محايد لـــ ⊕
٧ ⊕ س = س ⊕ ٧ = س ∀ س ∋ س
٤. لكل عنصر من س نظير فالعنصران ١ ، ٦ متناظران والعنـــصران ٢ ، ٥ متناظران وكذلك ٣ ، ٤ والعنصر ٧ نظير نفسه وهكذا نرى أن النظام ( س ، ⊕ ) زمرة .

وحيـــث ان س ⊕ ص = ص ⊕ س مهمـــا كـــان س و ص مـــن س ( الجدول متناظر حول قطره الرئيسي) فالزمرة تبديلية .

## تمرين ( ٨ – ١٠ )

(١) أثبت ان مجموعة الاعداد النسبية ن مع عملية الجمع زمرة تبديلية

(٢) بين فيما اذا كانت الانظمة التالية تشكل زمرا أم لا .

( أ ) مجموعة الاعداد الفردية مع عملية الجمع

( ب) مجموعة الاعداد الزوجية مع عملية الجمع

(٣) العملية ⊗ المعرفة على المجموعة م = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } بمقيــاس ١٠ . أثبت أن :

( م ، ⊗ ) زمرة ابدالية

(٤) اثبت ان ( ص ، * ) زمرة وذلك بفرض ان العملية معرفة كما يلى

س * ص = س + ص – ٥

∀ س ، ص ∍ ص

جد العنصر المحايد لــ * وجد القانون الذي يعين نظير أي عنــصر من هذه الزمرة بالنسبة الى * .

(٥) بين فيما اذا كانت ص مزودة بالعملية * فى كل من الحالات التالية تشكل زمرة :

( أ ) س * ص = ٢ (س + ص )

( ب) س * ص = س – ص

( ج) س * ص = ٢ س + ص

( د ) س * ص = ٢ س + ص – س٢

**تمرين عام**

إذا كانت * عملية ثنائية معرفة على المجموعة ص على النحو التالي :

س * ص = س–٢ص فأجب عما يلي :

أ/ أحسب قيمة (٦ * ٧) *٢ ، ٦ * (٧* ٢)

ب/ هل يوجد للعملية الثنائية * عنصر محايد ؟

ج/ هل العملية الثنائية * إبدالية؟ ، تجميعية ؟

(٢) في النظام (ص$_{٨}$ ، $\odot$ ) جد :

أ/ العنصر المحايد ونظير كل من ٣ ،٥

ب/ مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية

١/ ٢ $\odot$ س =٠

٢/ ٣ $^{١-}$ $\odot$ = ٠

٣/ ٤ $\odot$ س

(٣) أثبت النظام ( ص * ، $\odot$ ) زمرة إبدالية

(٤) اذكر مثالاً يمثل :

أ. نظام ذا عملية ثنائية إبدالي ويوجد به عنصر محايد .

ب. نظام ذا عملية ثنائية إبدالي ولا يوجد به عنصر محايد .

ج. نظام ذا عملية ثنائية به عنصر محايد ولا يحقق خاصية النظير.

د. نظام ذا عملية ثنائية به عنصر محايد ويحقق خاصية النظير.

**تذكر أن** :

العملية الثنائية على المجموعة س هي تطبيق مجاله حاصل الضرب الديكارتي س × س ومجاله المقابل س .

# الوحدة التاسعة :

# الأعداد المركبة

**أهداف الوحدة التاسعة**

بعد نهاية هذه الوحدة يتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن :

١ /يعرف العدد المركب .
٢ /يجد قيمة ت ( العامل التخيلي) مرفوعاً لأي عدد حقيقي .
٣ /يعرف مجموعة الأعداد المركبة .
٤ /يجري العمليات الأربع على مجموعة الأعداد المركبة .
٥ /يعرّف خواص الأعداد المركبة .

## الوحدة التاسعة
## مجموعة الأعداد المركبة (الغير حقيقية)

### (٩-١) مقدمة

تعامل الرياضيون في القرن السادس عشر الميلادي بالعدد التخيلي $\sqrt{-1}$ ولو أنهم استطاعوا أن يصلوا إلى نتائج غير متضاربة إلا أنهم لم يستطيعوا تفسير عملياتهم على أساس منطقي . وفي القرن الثامن عشر توسعت معالجة الأعداد المركبة على أيدي ( أويلر وبرنولي وديموافر) واستخدمت كوسيلة رياضية وظهرت أهميتها التطبيقية في الجبر في نظريات المعادلات وفي حساب المثلثات وفي التفاضل والتكامل والهندسة بتفسير الأعداد المركبة تفسير هندسي على أيدي (فسل وآرقند) في نهاية القرن الثامن عشر .إلا أنه لم يستطيع الرياضيون قبل القرن التاسع عشر وضع أساس منطقي للأعداد المركبة . فوضع جاوس وهاملتون وكوشي (مستقلين عن بعض) هذا الأساس في القرن التاسع عشر . ومنه وضع الأساس في نظرية الدوال ذات المتغير المركب (الدوال المركبة) وظهرت أهمية هذه النظرية في نمو التحليل الرياضي الحديث ونظرية الأعداد في تطبيقاتها الواسعة في العلوم التطبيقية مثل الطبيعة والميكانيكا والهندسة الكهربية .

**تمهيد :**

حل المعادلة $س^{٢} + ٤ = ٠$ س $\in$ ح

ح هي مجموعة الأعداد الحقيقية

الحل

$س^{٢} = -٤$

$س = \pm \sqrt{-٤}$

نلاحظ أن الناتج $\sqrt{-٤}$ لا يمكن أن يساوي +٢ أو , −٢ لأن $(+٢)^{٢} = +٤$ ، $(-٢)^{٢} = +٤$ والكميتان +٢ ، −٢ لهما وجود حقيقي ويمكن تمثيلها هندسياً على محور السينات أو محور الصادات ولذلك فهي تسمى كميات حقيقية أما الكمية $\sqrt{-٤}$
فليس لها وجود حقيقي ولذلك فهي تسمى كمية تخيلية ( غير حقيقية ) .

**تعاريف :**

١/
الكمية الحقيقية : هي الكمية التي مربعها يكون موجباً مثل $\pm ٢$ ، $\pm$ س حيث س $\in$ ح

٢/
الكمية التخيلية : هي الكمية التي يكون مربعها سالباً مثل $\pm \sqrt{-٤}$ ، $\pm \sqrt{-س}$ س $\in$ $ح^{+}$

**(٩–٢) العامل التخيلي :**

نعلم أن $\sqrt{٦} = \sqrt{٢\times٣} = \sqrt{٢}\times\sqrt{٣}$

$$\sqrt{س\ ص} = \sqrt{س}\times\sqrt{ص}$$

$$\sqrt{٥٠} = \sqrt{٢٥\times٢} = \sqrt{٢٥}\times\sqrt{٢} = ٢\ \sqrt{٢}$$

$$\sqrt{أ^{٢}\ ب} = \sqrt{أ^{٢}}\times\sqrt{ب} = أ\sqrt{ب}$$

وبمثل ما تقدم يكون :

$$\sqrt{-٢} = \sqrt{٢\times(-١)} = \sqrt{٢}\times\sqrt{-١}$$

$$\sqrt{-س} = \sqrt{س\times(-١)} = \sqrt{س}\times\sqrt{-١}$$

$$\sqrt{-٤} = \sqrt{٤\times(-١)} = \sqrt{٤}\times\sqrt{-١}$$

ومن الأمثلة السابقة يتضح لنا أن أي كمية تخيلية يمكن وضعها في كل حالة على صورة عاملين : الأول حقيقي والثاني تخيلي ( ويساوي $\sqrt{-١}$ )ويرمز له بالحرف ت (الحرف الأول من كلمة تخيلي )

$\therefore$ أي كمية تخيلية = كمية حقيقية × العامل التخيلي ت

أمثلة :

$$\sqrt{-٥} = \sqrt{-١\times٥} = \sqrt{-١}\times\sqrt{٥} = ت\ \sqrt{٥}$$

$\sqrt{-٤} = \sqrt{-١ \times ٤} = ت \times ٢ = ٢ت$

$\sqrt{-أ} = \sqrt{-١ \times أ} = ت \sqrt{أ}$

$\sqrt{-١٦} = \sqrt{-١ \times ١٦} = ٤ت$

**(٩-٣) قوى ت :**

$\because ت = \sqrt{-١}$

$ت^{٢} = (\sqrt{-١})^{٢} = -١$

$ت^{٣} = ت^{٢} \times ت = -ت$

$ت^{٤} = (ت^{٢})^{٢} = (-١)^{٢} = ١$

$ت^{٥} = ت^{٤} \times ت = ١ \times ت = ت$

$ت^{٦} = ت^{٥} \times ت = ت \times ت = ت^{٢} = -١$

$ت^{٧} = ت^{٦} \times ت = -١ \times ت = -ت$

$ت^{٨} = ت^{٧} \times ت = -ت^{٢} = -(-١) = ١$

الملاحظ: القيم تتكرر

نجد أن إذا كانت قوى ت الزوجية الناتج كميات حقيقية وهي (١ أو -١) وكما نجد صيغة العدد الزوجي الطبيعي كما يلي :

| العدد الزوجي | صيغة العدد الزوجي ٢ن |
|---|---|
| ٢ | ٢×١ |
| ٤ | ٢×٢ |
| ٨ | ٢×٤ |
| ١٢ | ٢×٦ |
| ١٤ | ٢×٧ |
| ⋮ | ⋮ |

$$ت^{٢ن} = \begin{cases} ١ & \text{إذا كانت ن العدد الزوجي زوجية} \\ -١ & \text{إذا كانت ن العدد الزوجي فردية} \end{cases}$$

**مثال (١) :**

جد قيمة الآتي : $ت^{١٠}$ ، $ت^{٢٨}$ ، $ت^{٢٠}$ ، $ت^{٥٨}$

**الحل :**

$ت^{١٠} = ت^{٢×٥} = -١$ ، $ت^{٢٨} = ت^{٢×١٤} = ١$ ، $ت^{٢٠} = ت^{٢×١٠} = ١$

$ت^{٥٨} = ت^{٢×٢٩} = -١$

قوى ت الفردية كميات تخيلية وهي (ت ، − ت)

ونجد صيغة العدد الفردي كما يلي :

| العدد الفردي | صيغة العدد الفردي ٢ن+١ |
|---|---|
| ١ | ٢×٠ +١ |
| ٣ | ٢×١ +١ |
| ٥ | ٢×٢ +١ |
| ٧ | ٢×٣ +١ |
| ٩ | ٢×٤ +١ |
| ⋮ | ⋮ |

$$ت^{٢ن+١} = \begin{cases} ت & \text{إذا كانت ن العدد الفردي زوجية} \\ -ت & \text{إذا كانت ن العدد الفردي فردية} \end{cases}$$

**مثال (٢) :** جد قيمة الآتي : $ت^{٩}$ ، $ت^{١٧}$ ، $ت^{١٩}$ ، $ت^{٥٣}$

الحل

$ت^{٩} = ت^{٢×٤+١} = ت$

$ت^{١٧} = ت^{٢×٨+١} = ت$

$ت^{١٩} = ت^{٢×٩+١} = -ت$
$ت^{٥٣} = ت^{٢×٢٦+١} = ت$

**تعريف**

**العدد المركب**

هو الذي يكتب في صورة س + ت ص حيث س ، ص ∈ ح، ت = $\sqrt{-١}$ تسمى س الجزء الحقيقي للعدد المركب وتسمى ص بالجزء التخيلي للعدد المركب .

الجدول التالي يوضح أمثلة للأعداد مركبة:

| العدد المركب | الجزء الحقيقي | الجزء التخيلي |
|---|---|---|
| س + ت ص | س | ص |
| ٤+ ٥ت | ٤ | ٥ |
| −٤ + ٥ت | −٤ | ٥ |
| −٤ − ٥ت | −٤ | −٥ |
| ٤−٥ت | ٤ | −٥ |
| ٤ | ٤ | صفر |
| ٥ت | صفر | ٥ |

تعريف :

**مجموعة الأعداد المركبة :**

هي مجموعة الأعداد الغير حقيقية أو التخيلية تحتوي على مجموعة الأعداد الحقيقية وتتكون جميع أعدادها من جزئين جزء حقيقي وجزء تخيلي ونرمز لها بالرمز كـ

**مثال (٣) :**

اكتب الأعداد التالية على صورة أعداد مركبة :

$-٦$ ، $\sqrt{-٢٥}$ ، $٣-\sqrt{-٧}$ ، $\frac{٢+\sqrt{-٣٦}}{٢}$

الحل :

$-٦ = -٦ +$ صفر $\times$ ت

$\sqrt{-٢٥} = \sqrt{٢٥}\ ت = ٠ + ٥ت$

$٣ - \sqrt{-٧} = ٣ - \sqrt{٧}\ ت$

$$\frac{٢+\sqrt{-٣٦}}{٢} = \frac{٢+\sqrt{٣٦}}{٢}\ ت$$

$$= \frac{٢}{٢} + \frac{٦}{٢}ت$$

$$= ١ + ٣\ ت$$

## تمرين (٩– ١)

اختصر

١/

$$\frac{١ + \text{ت}^{٢} + \text{ت}^{٤} + \text{ت}^{٥} + \text{ت}^{٧}}{\text{ت} + \text{ت}^{٨} - \text{ت}^{٩}}$$

٢/ جد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لكل من الأعداد المركبة التالية :

أ/ ٧– ٥ت

ب/ ٣ت –١١

ج/ –٦ت

د/ ٣,٦

ه/ –٢,٩– ٣,١ت

٣/ اكتبْ الأعداد التالية في صورة أ +ب ت

أ/ ٧ ب/ $-\sqrt{٧}$ جـ/ $\sqrt{-٧}$ د. $\text{ت}^{-٢\text{ن}+١}$ هـ/ $-٣ - \sqrt{-٤}$

و/ $\sqrt{-٩} + \sqrt{٩}$ ز/ $\text{ت} + \text{ت}^{-١١}$

٤/ جد قيمة كل مما يأتي :

أ/ $٣\sqrt{-٥} \times ٢\sqrt{-٣}$

ب/ $\text{ت}^{٦} - \text{ت}^{٩}$

ج/ $\text{ت}^{١٠} - \text{ت}^{٦٤}$

٥/ حلل كل من ٣٧ ، ٥٨ إلى عاملين تخيليين يحتويان على أعداد جذرية.

## (٩–٤) شرط تساوي عددين مركبين :

يقال لعددين مركبين ( $س_١$ +ت $ص_١$ ) ، ( $س_٢$ + ت $ص_٢$ ) أنهما متساويان عندما يتساوى الجزءان الحقيقيان لهما على حدة ويتساوى الجزءان التخيليان لهما على حدة .

أي $س_١ = س_٢$ ، $ص_١ = ص_٢$

**مثال (١)**

فإذا كان س + ت ص = ٢ + ٥ ت جد قيمة كل من س وص

الحل :

س = ٢ ، ص = ٥

**مثال (٢) :**

إذا علم أن :

( س – ٢ ) + ٥ ت = ٤ – ( ص + ١ ) ت

جد قيمة كل من س ، ص .

**الحل :**

من خاصية تساوي العددين المركبين

س – ٢ = ٤

٥ = – ( ص + ١ )

∴ س – ٢ = ٤ ⇐ س = ٦

ص + ١ = –٥ ⇐ ص = –٦

**تمرين (٩–٢)**

جد الأعداد الحقيقية س ، ص فيما يأتي :

(١) ( ٢ س – ١ ) + ٣ ت = ٥ – ٣ ص ت

(٢) ١ – ( س – ٢ ص ) ت = ص + ٤ ت

(٣) ($س^٢$ – $ص^٢$ ) + ٢ س ص ت = ت

(٤) ( ٣ + ٢ ت ) س + ( ٢ – ٣ ت ) ص = –٥ + ت

(٥) ( ٢ – ت ) س + ( ٣ ت – ٧ ) ص + ٢ = صفر

**(٩–٥) جمع وطرح الأعداد المركبة :**

العدد المركب س +ت ص يمكن أن نعبر عنه في صورة الزوج المرتب (س، ص) . ويمكننا تعريف عملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة كما يلى :

$$(س_١ ، ص_١ ) + (س_٢ ، ص_٢ ) = (س_١ + س_٢ ، ص_١ + ص_٢ )$$

وبالمثل عملية الطرح :

$$(س_١ ، ص_١ ) - (س_٢ ، ص_٢ ) = (س_١ - س_٢ ، ص_١ - ص_٢ )$$

أي أن مجموع العددين المركبين $س_١ + ص_١ ت$ ، $س_٢ + ص_٢ ت$ هو $(س_١ + ص_١ ت ) + (س_٢ + ص_٢ ت ) = (س_١ + س_٢ ) + ( ص_١ + ص_٢ ) ت$ .

تلاحظ هنا عند إجراء عملية جمع عددين مركبين نجمع الجزءين الحقيقيين معاً ونجمع الجزءين التخيليين معاً ، أي أنهما يجمعان كمقدارين جبريين . وكذلك الحال بالنسبة لعملية الطرح .

$$(س_١ + ص_١ ت ) -(س_٢ + ص_٢ ت) = (س_١ - س_٢ ) + ( ص_١- ص_٢ ) ت$$

**مثال (١) :**

جد مجموع العددين ٣ + ٤ ت ، ٥ – ٢ ت .

**الحل :**

( ٣ + ٤ ت ) + ( ٥ – ٢ ت ) = ( ٣ + ٥ ) + ( ٤ – ٢ ) ت

= ٨ + ٢ ت

**مثال (٢) :**

جد مجموع ٧ ، ٥ – ت

**الحل :**

٧ + ( ٥ – ت ) = ( ٧ + صفر ت ) + ( ٥ – ت )

= ( ٧ + ٥ ) + ( ٠ – ١ ) ت

= ١٢ – ت

**مثال (٣) :**

جد ( ٥ – ١٢ ت ) – ( ٢ – ٤ ت )

**الحل :**

( ٥ – ١٢ ت ) – ( ٢ – ٤ ت ) = ( ٥ – ٢ ) + (–١٢+ ٤ ) ت

= ٣ – ٨ ت

**(٩–٦) خواص عملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة :**

أ. من الأمثلة السابقة تلاحظ أن ناتج جمع العددين المركبين هو عدد مركب ، وبصورة عامة نستطيع القول إن مجموعة الأعداد المركبة مغلقة تحت تأثير عملية الجمع .

ب. وإذا تأملت المثال التالي :

( ٤ + ٣ ت ) + ( ٢ – ت ) = ( ٤ + ٢ ) + ( ٣ – ١ ) ت

= ٦ + ٢ ت

( ٢ – ت ) + ( ٤ + ٣ ت ) = ( ٢ + ٤ ) + ( –١ + ٣ ) ت

= ٦ + ٢ ت

**وبصورة عامة :**

( أ + ب ت ) + ( جـ + د ت ) = ( جـ + د ت ) + ( أ + ب ت )

أي أن :

الجمع على مجموعة الأعداد المركبة يتمتع بالخاصية الإبدالية .

جـ. بما أن الصفر يمكن أن يكتب كعدد مركب ( صفر ، صفر ) أو صفر + صفر ت .

تلاحظ أنه عند جمع أي عدد مركب أ + ب ت إلى الصفر ينتج ( أ + ب ت ) + ( صفر + صفر ت ) = أ + ب ت .

إذن الصفر هو العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة .

د. في المثال التالى جد ناتج الجمع في كل حالة :

(١) [ ( ٣ –ت ) + ( ٢ + ٣ ت ) ] + ( ٤ – ت )

(٢) ( ٣ – ت ) + [ ( ٢ + ٣ ت ) + ( ٤ – ت ) ]
ماذا تلاحظ ؟
(١) [ ( ٣ – ت ) + ( ٢ + ٣ ت ) ] + ( ٤ – ت )
= [ ( ٣ + ٢ ) + ( ‾١ + ٣ ) ت ] + ( ٤ – ت )
= ( ٥ + ٢ ت ) + ( ٤ – ت )
= ( ٥ + ٤ ) + ( ٢ – ١ ) ت = ٩ + ت
(٢) ( ٣ – ت ) + [ ( ٢ + ٣ ت ) + ( ٤ – ت ) ]
= ( ٣ – ت ) + [ ٢ + ٤ ) + ( ٣ – ١ ) ت ]
= ( ٣ – ت ) + [٦ + ٢ ت ] = ٩ + ت
أى أن : [ ( ٣ – ت ) + ( ٢ + ٣ ت ) ] +
( ٤ – ت ) =
( ٣ – ت ) + [ ( ٢ + ٣ ت ) + ( ٤ – ت ) ]

**بصورة عامة :**

[ ( أ + ب ت ) + ( جـ + د ت ) ] + ( هـ + و ت )
= ( أ + ب ت ) + [ ( جـ + د ت ) + ( هـ + و ت) ]

أي أن الجمع على مجموعة الأعداد المركبة يتمتع بالخاصية التجميعية .
(هـ) جد مجموع العددين ( ٧ + ٣ ت ) ، ( –٧ – ٣ ت )
ماذا تلاحظ ؟
(٧ + ٣ ت) + (– ٧ – ٣ ت) = (٧ + (–٧)) ( +٣ (–٣)) ت
= صفر + صفر ت = صفر
نلاحظ هنا عند جمع العددين ٧ + ٣ ت ، – ٧ – ٣ ت أننا حصلنا على العنصر المحايد لعملية الجمع على كـ وهذا يؤكد لنا بأن –٧ – ٣ ت هو النظير الجمعى للعدد ٧ + ٣ ت . ( – أ – ب ت ) هو النظير الجمعى للعدد ( أ + ب ت ) . وعلى هذا يكون لكل عنصر من عناصر مجموعة الأعداد المركبة نظير جمعى . مما سبق نرى أن :

عملية الجمع على كـ عملية ثنائية داخلية وأن النظام ( كـ ، + ) نظام إبدالى وتجميعى ويمتلك عنصراً محايداً هو الصفر ولكل عنصر فيه نظير بالنسبة لعملية الجمع + ، وعلى هذا يكون :

( كـ ، + ) زمرة إبدالية

**مثال (٤) :**

إذا علم أن ع عدد مركب جد قيمة ع إذا كان :

( ٥ – ٣ ت ) + ع = –٦ + ت

**الحل :**

بإضافة النظير الجمعى للعدد ( ٥ – ٣ ت ) لطرفى المعادلة :

(–٥+ ٣ ت ) + ( ٥ – ٣ ت ) + ع = (–٥+ ٣ ت ) + (–٦+ ت )

[(–٥+ ٥ ) + ( ٣ – ٣ ) ت ] + ع = (–٥+(–٦)) + ( ٣ + ١ ) ت

( الخاصية التجميعية )

[ صفر + صفر ت ] + ع = – ١١ + ٤ ت

∴ ع = – ١١ + ٤ ت

( خاصية العنصر المحايد)

## تمرين (٩–٣)

(١) جد مجموع العددين المركبين في كل مما يأتي :

(أ) ( ٣ – ٧ ت ) ، ( ١ + ٢ ت )

(ب) (–٢– ٣ ت ) ، ( ٥ – ت )

(جـ) ( ٧ + ٤ ت ) ، ( ٦ – ٥ ت )

(د ) ٣ ت ، ( ٦ – ٩ ت )

(هـ) ١١ ، (–١+ ت )

(و ) ت ، ٤ ت

(ز ) ٣ – ٢ ت ، ٣ + ٢ ت

(٢) جد ناتج ما يأتي :

(أ) ( ٥ + ٧ ت ) – ( ١ + ٤ ت )

(ب) ( ٩ – ت ) – ( ٧ + ٣ ت )

(جـ) –٤ت – ( ٥ – ت )

(د ) – ( ٣ + ٦ ت ) – ( ٥ + ت )

(هـ) –ت – ( ٢ – ت )

(٣) جد قيمة كل مما يأتي :

(أ) ( ٩ – ٤ ت ) + ( ٢ – ٣ ت ) – ( ٤ + ٥ ت )

(ب) ( – ٧ – ٢ ت ) – ( ٩ + ت ) + ( ٨ + ٣ ت )

(جـ) – ( –٤ + ٣ ت ) + ٢ ت – (ت – ٧ )

(د ) ( ٣ – ١١ ت ) + ٦ ت – ( ٨ – ٣ ت )

(٤) حل المعادلات التالية ( ع ∋ كـ )

(أ) ع + ( ٢ + ت ) = ٣

(ب) ع + ( –٤ + ٤ ت ) = ١

(جـ) ع – ( ٢ ت + ١ ) = ٥

(د ) ( –٦ – ٢ ت ) + ع = ٧ – ت

**(٩−٧) عملية الضرب على مجموعة الأعداد المركبة :**

لاحظنا في الدرس السابق أن العددين المركبين يجمعان كمقدارين جبريين، وكذلك الحال عند إجراء عملية الضرب ، فلإيجاد حاصل ضرب عددين مركبين نقوم بضربهما كمقدارين جبريين ، ونعوض بدلاً عن ت$^{٢}$ العدد −١ كما يلي :

( أ + ب ت ) ( جـ + د ت ) = أ جـ + أ د ت + ب جـ ت + ب د ت$^{٢}$

= أ جـ + أ د ت + ب جـ ت − ب د

= ( أ جـ − ب د ) + ( أ د + ب جـ ) ت

أي أن :

( أ + ب ت) ٠ ( جـ + د ت) = ( أ جـ − ب د ) + ( أ د + ب جـ ) ت

أما إذا عبرنا عن الأعداد المركبة في صورة ازواج مرتبة فإننا يمكن أن نعرف عملية الضرب على النحو الآتي :

> إذا كان ع$_{١}$ = ( س$_{١}$ ، ص$_{١}$ ) ، ع$_{٢}$ = ( س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$ ) فإن :
> ع$_{١}$ع$_{٢}$ = ( س$_{١}$ س$_{٢}$ − ص$_{١}$ ص$_{٢}$ ، س$_{١}$ ص$_{٢}$ − س$_{٢}$ ص$_{١}$ )

**مثال (١) :**

جد ناتج الضرب

( ٣ + ٢ ت ) × ( ٢ − ٥ ت )

**الحل :**

( ٣ + ٢ ت ) ( ٢ − ٥ ت )

= ٣ × ٢ + ٣ × −٥ ت + ٢ × ٢ ت + ٢ ت (−٥ت )

= ٦ − ١٥ ت + ٤ ت − ١٠ ت$^{٢}$

= ٦ − ١١ ت + ١٠ = ١٦ − ١١ ت

**مثال (٢) :**

جد ناتج الضرب

( ٥ − ٢ ت )$^{٢}$

**الحل :**

( ٥ – ٢ ت )$^{٢}$ = ( ٥ – ٢ ت ) ( ٥ – ٢ ت)

= ٢٥ – ١٠ ت – ١٠ ت + ٤ ت$^{٢}$

= ٢٥ – ٤ – ٢٠ ت = ٢١ – ٢٠ ت

**مثال (٣) :**

جد ناتج ٣ ت ( ١ – ٧ ت)

**الحل :**

٣ ت ( ١ – ٧ ت ) = ٣ ت – ٢١ ت$^{٢}$

= ٣ ت + ٢١ = ٢١ + ٣ ت

لاحظ أنه عند ضرب أى عددين مركبين يكون ناتج الضرب عدداً مركباً ، أى أن :

مجموعة الأعداد المركبة مغلقة تحت تأثير عملية الضرب .

**مثال (٤) :**

جد ناتج ضرب العددين ٣ – ٤ ت ، ٣ + ٤ ت

**الحل :**

( ٣ – ٤ ت ) ( ٣ + ٤ ت ) = ٩ + ١٢ ت – ١٢ ت – ١٦ ت$^{٢}$

= ٩ + ١٦ = ٢٥

لاحظ في هذا المثال أن العددين ٣ – ٤ ت ، ٣ + ٤ ت حاصل ضربهما عدد حقيقى (٢٥) ، وحاصل جمعهما ايضاً عدد حقيقى (٦) . يطلق على العددين اللذين على هذه الصورة العددان المترافقان .

وبالمثل : ٧ + ٢ ت ، ٧ – ٢ ت عددان مترافقان .

وبصورة عامة يكون أ – ب ت هو مرافق أ + ب ت

لاحظ أننا عند ايجاد العدد المرافق للعدد المركب نغيّر إشارة الجزء التخيلى فقط .

يرمز لمرافق العدد المركب ع بالرمز $\overline{\text{ع}}$ .

من مثال (٤) :

(أ) إذا كان ع = ٤ − ٦ ت فإن $\overline{\text{ع}}$ = ٤ + ٦ ت

(ب) $\overline{-١ + ٧\ \text{ت}}$ = −١ − ٧ ت

(جـ) $\overline{-١١}$ = −١١

(د) $\overline{-\text{ت}}$ = ت

يتضح من تعريف المرافق أنه يحقق الخواص التالية :

(١) $\overline{\text{ع}_١ + \text{ع}_٢} = \overline{\text{ع}_١} + \overline{\text{ع}_٢}$ ، $\overline{\text{ع}_١\ \text{ع}_٢} = \overline{\text{ع}_١} \cdot \overline{\text{ع}_٢}$

(٢) $\overline{\overline{\text{ع}}} = \text{ع}$

(٣) إذا كان ع = أ + ب ت فإن ع $\overline{\text{ع}}$ = أ$^٢$ + ب$^٢$ ، ع + $\overline{\text{ع}}$ = ٢ أ ، ع − $\overline{\text{ع}}$ = ٢ ب ت

(٤) إذا كان ع عدداً حقيقياً فإن ع = $\overline{\text{ع}}$

**مثال (٥) :**

إذا كان $\text{ع}_١$ = ١ − ٣ ت ، $\text{ع}_٢$ = −٢ + ت

فتحقق من أن :

$\overline{\text{ع}_١ \cdot \text{ع}_٢} = \overline{\text{ع}_١} \cdot \overline{\text{ع}_٢}$

**الحل :**

$\overline{\text{ع}_١ \cdot \text{ع}_٢}$ = ( ١ − ٣ ت ) ( −٢ + ت ) = ١ + ٧ ت

$\overline{\text{ع}_١ \cdot \text{ع}_٢}$ = ١ − ٧ ت

$\overline{\text{ع}_١} \cdot \overline{\text{ع}_٢}$ = (١ + ٣ ت ) ( −٢ − ت )

= ١ − ٧ ت

$\therefore \overline{ع_١ \cdot ع_٢} = \overline{ع_١} \cdot \overline{ع_٢}$

رأيناً في الدرس السابق أن عملية الجمع على كـ ابدالية وتجميعية وأن الصفر عنصر محايد لها ولكل عنصر نظير جمعى ، أما فيما يتعلق بعملية الضرب على كـ فهى أيضاً إبدالية وتجميعية وأن العدد ١ عنصر محايد لها في كـ ، ولنبحث الآن عن النظير الضربى .

فإذا افترضنا أن النظير الضربى للعدد المركب أ + ب ت مثلاً هو ع حيث ع $\in$ كـ

$\therefore$ ع ( أ + ب ت ) = ١

ولإيجاد قيمة ع يقتضى وضع ع مضروبه في عدد حقيقى . لذا نضرب طرفى المعادلة أعلاه في مرافق أ + ب ت ، أي نضرب في ( أ − ب ت ) .

ع ( أ + ب ت ) ( أ − ب ت ) = ١ ( أ − ب ت )

ع ( $أ^٢ - ب^٢ ت^٢$ ) = أ − ب ت

ع ( $أ^٢ + ب^٢$ ) = أ − ب ت

$\therefore ع = \frac{أ - ب ت}{أ^٢ + ب^٢}$

إذن يكون النظير الضربى للعدد أ + ب ت هو :

$\frac{أ - ب ت}{أ^٢ + ب^٢}$ أى أن النظير الضربى للعدد ع = $\frac{\overline{ع}}{ع \overline{ع}}$

وحيث أن $أ^٢ + ب^٢$ لا تساوي الصفر إلا إذا كان أ = ٠ ، ب = ٠ معنى ذلك أن العدد المركب ( صفر ) ليس له نظير ضربى . وبالتالي فإن :

( كـ − { ٠ } ، × ) زمرة إبدالية .

**مثال (٦) :**

جد النظير الضربى لكل من الأعداد المركبة التالية :

(١) ٥ + ٣ ت

(٢) ٣ − ت

**الحل :**

(١) النظير الضربي للعدد ٥ + ٣ ت = $\frac{\text{٥ − ٣ ت}}{\text{٢٥ + ٩}} = \frac{\text{٥ − ٣ ت}}{\text{٣٤}}$

$= \frac{\text{٥}}{\text{٣٤}} - \frac{\text{٣}}{\text{٣٤}}$ ت

(٢) النظير الضربى للعدد ٣ − ت = $\frac{\text{٣ + ت}}{\text{٩ + ١}} = \frac{\text{٣ + ت}}{\text{١٠}}$

$= \frac{\text{٣}}{\text{١٠}} + \frac{\text{١}}{\text{١٠}}$ ت

## تمرين (٩−٤)

(١) جد ناتج كل من :

أ. ٥ ( ٧ − ٢ ت )

ب. ٣ ت ( ٣ + ت )

ج. ت ( ٦ − ت )

د. ( ٤ − ٥ ت ) ( ٥ + ٧ ت )

هـ. ( ٥ + ٣ ت ) ( ٥ − ٣ ت )

(٢) إذا كان $\text{ع}_{١}$ = ٤ + ت ، $\text{ع}_{٢}$ = −٩ + ١١ ت ، احسب :

أ. ٢ $\text{ع}_{١}$ − ٣ $\text{ع}_{٢}$ ب. $\text{ع}_{١} \cdot \text{ع}_{٢}$ جـ. $\text{ع}_{١}^{٢}$

(٣) إذا كان $\text{ع}_{١}$ = ٣ − ٢ ت ، $\text{ع}_{٢}$ = ٤ + ٥ ت جد :

أ. $\overline{\text{ع}_{١} + \text{ع}_{٢}}$ ب. $\overline{\text{ع}_{١} \cdot \text{ع}_{٢}}$

(٤) جد النظير الضربى ( المقلوب ) لكل من الأعداد التالية :

أ. ( ١ + ٢ ت ) ب. ٥ − ٢ ت

جـ. −٢ + ت د. ٥ ت

(٥) حل كلاً من المعادلات التالية في كـ

أ. ( ١ − ٧ ت ) ع = ت ب. ( ٢ + ت ) ع = −١

جـ. ( ٣ + ت ) ع + ( ٤ − ت ) = ٢ ت

د. ت ع + ( ١ − ٨ ت ) = ٥

(٦) اثبت أن :

أ. $\overline{ع_1 + ع_2} = \overline{ع_1} + \overline{ع_2}$

ب. $\overline{ع_1 - ع_2} = \overline{ع_1} - \overline{ع_2}$

**(٩–٨) قسمة الأعداد المركبة :**

إن ناتج قسمة عدد مركب $ع_1$ على عدد آخر $ع_2 \neq ٠$ هو حاصل ضرب $ع_1$ في النظير الضربى ( المقلــوب ) للعدد $ع_2$ . فإذا رمزنـــا لمقلوب $ع_2$ بالرمز $\frac{١}{ع_2}$ ، فإن قسمة $ع_1$ على $ع_2$ والذى نرمز له بالرمز $\frac{ع_1}{ع_2}$

هو :

$$ع_1 . \frac{١}{ع_2} = ع_1 \times \frac{\overline{ع_2}}{ع_2 \overline{ع_2}}$$

أي لإجراء قسمـــة العدد المركب $ع_1 = أ + ب ت$ على العدد المركب $ع_2 = جـ + د ت \neq ٠$ فإننا نضرب بسط المقدار $\frac{ع_1}{ع_2}$ ومقامه بمرافق المقام.

أي $$\frac{أ + ب ت}{جـ + د ت} = \frac{( أ + ب ت ) ( جـ - د ت )}{( جـ + د ت ) ( جـ - د ت )}$$

$$= \frac{( أ + ب ت ) ( جـ - د ت )}{جـ^2 + د^2}$$

**مثال (١) :**

جد قيمة : (١) $\frac{١ + ت}{١ - ت}$ (٢) $\frac{٢ - ت}{٣ + ٤ ت}$

**الحل :**

(١) $= \frac{١ + ت}{١ - ت} = \frac{( ١ + ت ) ( ١ + ت )}{٢} \quad \frac{٢ ت}{٢} = ت$

$$(٢)\quad \frac{٢ - \text{ت}}{٣ + ٤\,\text{ت}} = \frac{(٢ - \text{ت})(٣ - ٤\text{ت})}{٩ + ١٦} =$$

$$= \frac{٦ - ٨\,\text{ت} - ٣\,\text{ت} - ٤}{٢٥} = \frac{٢ - ١١\,\text{ت}}{٢٥}$$

$$= \frac{٢}{٢٥} - \frac{١١}{٢٥}\,\text{ت}$$

**مثال (٢) :**

إذا كان $ع_{١} = ١ + ٢\,\text{ت}$ ، $ع_{٢} = -٥ + ٣\,\text{ت}$ ، $ع_{٣} = -٢ + \text{ت}$

احسب ما يأتى :

$$(\text{أ})\quad \frac{ع_{١}}{ع_{٢}} \qquad\qquad (\text{ب})\quad \frac{ع_{١}\,ع_{٢}}{ع_{٣}}$$

**الحل :**

$$(\text{أ})\quad \frac{ع_{١}}{ع_{٢}} = \frac{١ + ٢\,\text{ت}}{-٥ + ٣\,\text{ت}} = \frac{(١ + ٢\,\text{ت})(-٥ - ٣\,\text{ت})}{٢٥ + ٩}$$

$$= \frac{-٥ - ٣\,\text{ت} - ١٠\,\text{ت} + ٦}{٣٤} = \frac{١}{٣٤} - \frac{١٣}{٣٤}\,\text{ت}$$

$$(\text{ب})\quad \frac{ع_{١}\,ع_{٢}}{ع_{٣}} = \frac{(١ + ٢\,\text{ت})(-٥ + ٣\,\text{ت})}{-٢ + \text{ت}} = \frac{-١١ - ٧\,\text{ت}}{-٢ + \text{ت}}$$

$$= \frac{(-١١ - ٧\,\text{ت})(-٢ - \text{ت})}{٤ + ١} = \frac{١٥ + ٢٥\,\text{ت}}{٥}$$

$$= ٣ + ٥\,\text{ت}$$

**تمرين (٩− ٥)**

(١) جد قيمة ما يأتي :

( أ ) $\frac{٣ + ٢ت}{٢ - ٥ت}$ (ب) $\frac{٤ت}{٣ - ٢ت}$ (جـ) $\frac{٢ + ٣ت}{٣ + ٢ت}$

(د) $\frac{٧ - ٢ت}{٢ + ٧ت}$

(٢) أحسب ما يأتي واكتب الجواب على الصورة أ + ب ت :

( أ ) $\frac{١ + ت}{ت}$ (ب) $\frac{١ + ت}{(١ - ت)^{٢}}$ (جـ) $\frac{(٥ - ٩ت)^{٢}}{١ - ٢ت}$

(د) $\frac{(-٤ + ٧ت)(١ - ٤ت)}{-٢ + ٥ت}$

(٣) إذا كان $ع_{١} = ٦ + ٢ت$ ، $ع_{٢} = ١ + ت$ ، $ع_{٣} = ٢ - ٤ت$
احسب ما يأتي :

( أ ) $\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}$ (ب) $\frac{١}{ع_{١}} + \frac{١}{ع_{٢}} + \frac{١}{ع_{٣}}$

(٤) إذا كان $ع = ٢ - ٣ت$ جد قيمة :
$\frac{٣ع^{٢} - ٢ع + ١}{ع^{٢} - ٤}$ في الصورة أ + ب ت

(٥) اثبت أن :

( أ ) $\frac{٥ + ٥ت}{٣ - ٤ت} + \frac{٢٠}{٤ + ٣ت} = ٣ - ت$

(ب) $\frac{٣ت^{٣٠} - ت^{١٩}}{٢ت - ١} = ١ + ت$

**تذكر أن** :

بعد نهاية هذه الوحدة يتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن :

١/ العدد المركب هو الذي يكتب في صورة س + ت ص حيث س ، ص ∋ ح

ت= $\sqrt{-1}$ تسمى س الجزء الحقيقي للعدد المركب وتسمى ص بالجزء التخيلي للعدد المركب.

٢ / يقال لعددين مركبين ( س$_1$ +ت ص$_1$) ، ( س$_2$ + ت ص$_2$) أنهما متساويان عندما يتساوى الجزءان الحقيقيان لهما على حدة ويتساوى الجزءان التخيليان لهما على حدة .

٣ / (س$_1$ ، ص$_1$ ) + (س$_2$ ، ص$_2$ ) = (س$_1$ + س$_2$ ، ص$_1$ + ص$_2$ )

(س$_1$ ، ص$_1$ ) − (س$_2$ ، ص$_2$ ) = (س$_1$ − س$_2$ ، ص$_1$ − ص$_2$

٤/ إذا كان ع$_1$ = ( س$_1$ ، ص$_1$ ) ، ع$_2$ = ( س$_2$ ، ص$_2$ ) فإن :

ع$_1$ع$_2$ = ( س$_1$ س$_2$ − ص$_1$ ص$_2$ ، س$_1$ ص$_2$ − س$_2$ ص$_1$ )

٥/ $$\frac{أ + ب ت}{جـ + د ت} = \frac{(أ + ب ت)(جـ - د ت)}{(جـ + د ت)(جـ - د ت)}$$

$$= \frac{(أ + ب ت)(جـ - د ت)}{جـ^2 + د^2}$$